# WSTĘP DO ELEKTRONIKI

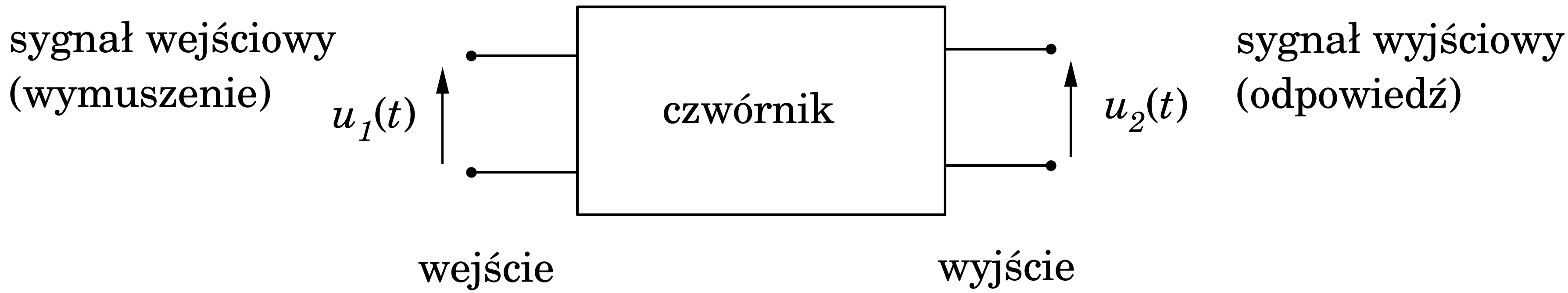
## Część IV

**Czwórniki**
**Linia długa**

Janusz Brzychczyk IF UJ

# Czwórniki

Czwórnik (dwuwrotnik) posiada cztery zaciski elektryczne. Dwa z tych zacisków uważamy za wejście czwórnika, a pozostałe dwa za wyjście.



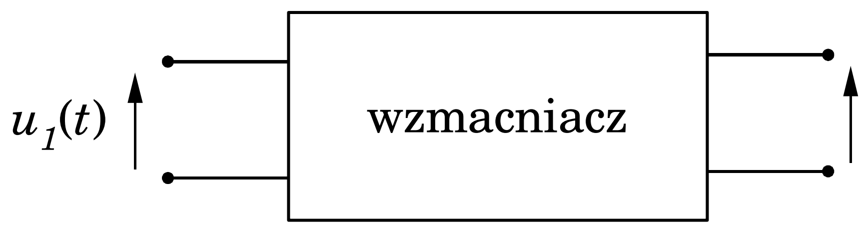

Sprzężenie wyjścia z wejściem opisywane jest przez funkcję (operator) przejścia, zwany też transmisją układu lub transmitancją:

$$T = \frac{\text{odpowiedź}}{\text{wymuszenie}} = \frac{u_2}{u_1}$$

# Rodzaje czwórników

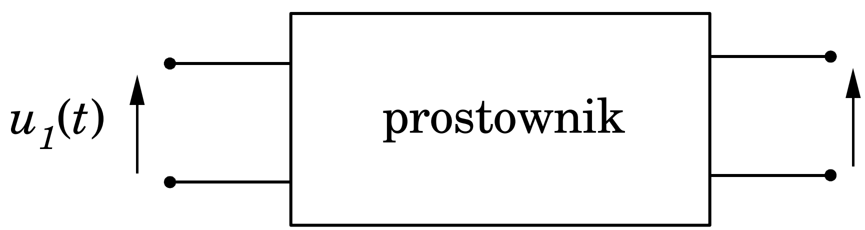
liniowe – nieliniowe
bierne (pasywne) – aktywne

## Przykłady czwórników:

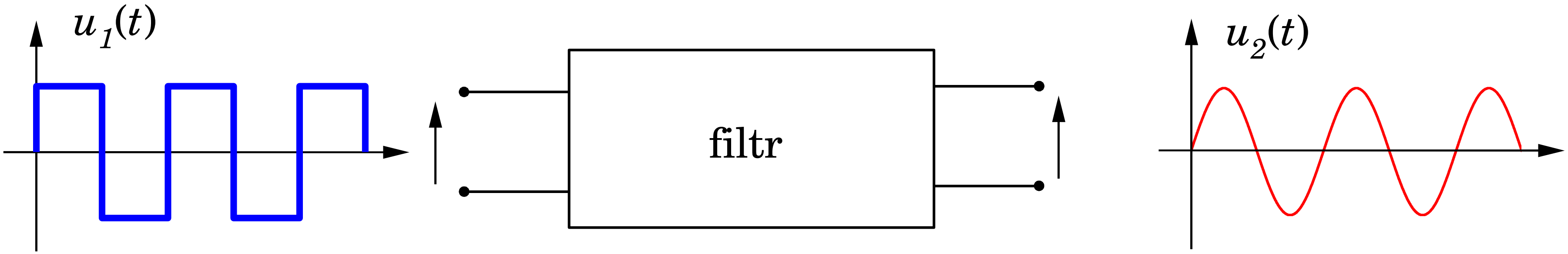



$u_2(t) = K u_1(t)$

$K$ – wzmocnienie układu




$u_2(t) = |u_1(t)|$



# Czwórniki liniowe


Dla fali sinusoidalnej $\tilde{u}_1(t) = U_1 \mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi_1)}$ funkcja przejścia ma postać $T = |T|\,\mathrm{e}^{j\Phi}$

Odpowiedź: $\tilde{u}_2(t) = T\tilde{u}_1(t) = |T|\,\mathrm{e}^{j\Phi}\, U_1 \mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi_1)} = |T|\, U_1 \mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi_1 + \Phi)} = U_2 \mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi_2)}$

Amplituda sygnału wyjściowego: $U_2 = |T|\, U_1$

Przesunięcie fazy: $\varphi_2 - \varphi_1 = \Phi$

W ogólnym przypadku funkcja przejścia zależy od częstości sygnału $T = T(\omega)$

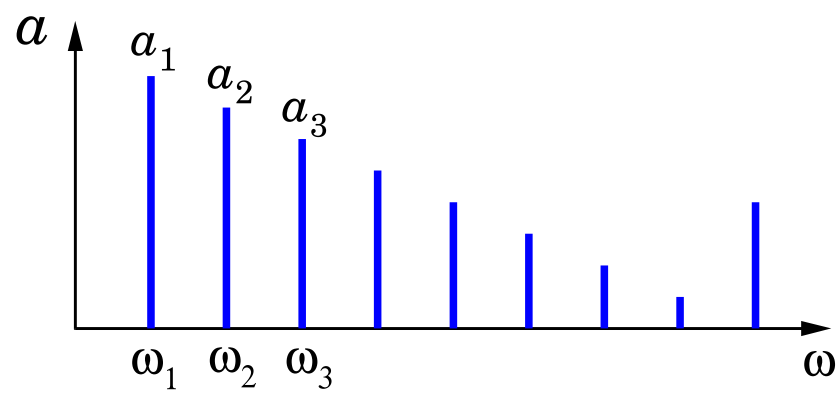
Funkcję określającą zależność $|T|$ od częstości nazywamy charakterystyką amplitudową.

Funkcję określającą zależność $\Phi$ od częstości nazywamy charakterystyką fazową.

# Czwórnik liniowy – filtr sygnałów elektronicznych

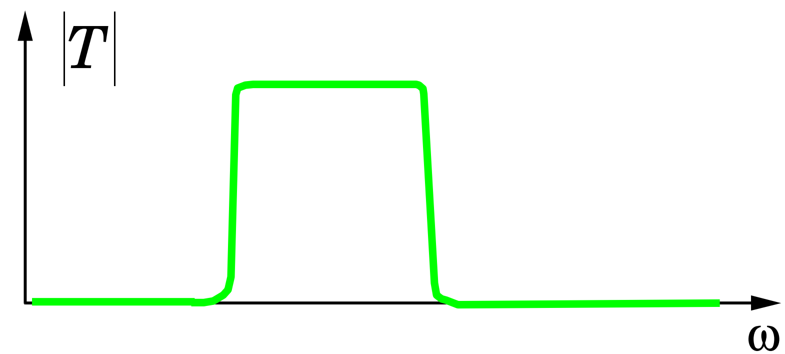
Jeżeli sygnał wejściowy jest superpozycją fal sinusoidalnych o amplitudach $a_k$ i częstościach $\omega_k$

$$\tilde{u}_1(t) = \sum_k a_k \mathrm{e}^{j(\omega_k t + \varphi_k)}$$




to dla

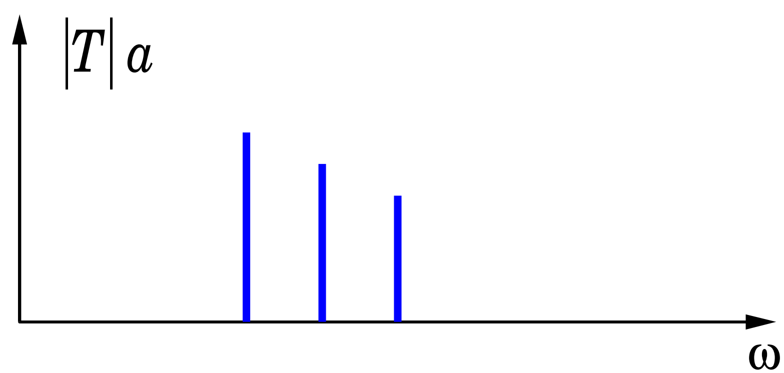
$$T(\omega) = |T(\omega)|\, \mathrm{e}^{j\Phi(\omega)}$$



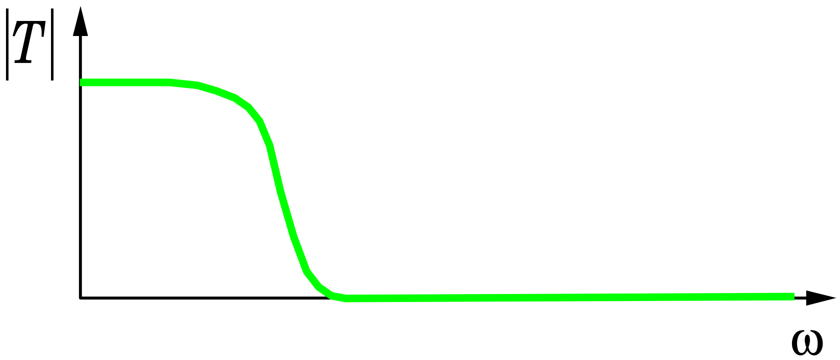

napięcie wyjściowe wynosi:

$$\tilde{u}_2(t) = \sum_k T(\omega_k)\, a_k \mathrm{e}^{j(\omega_k t + \varphi_k)}$$

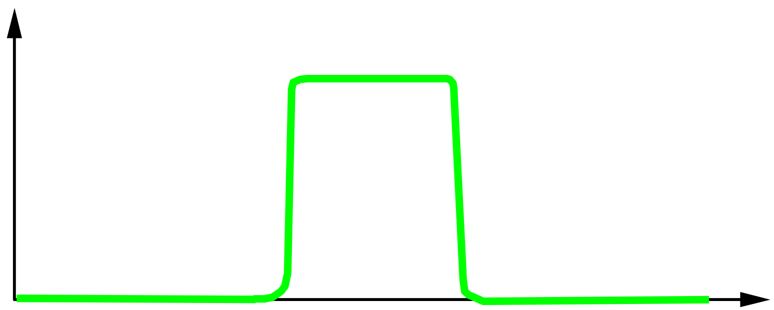
$$= \sum_k |T(\omega_k)|\, a_k \mathrm{e}^{j(\omega_k t + \varphi_k + \Phi(\omega_k))}$$



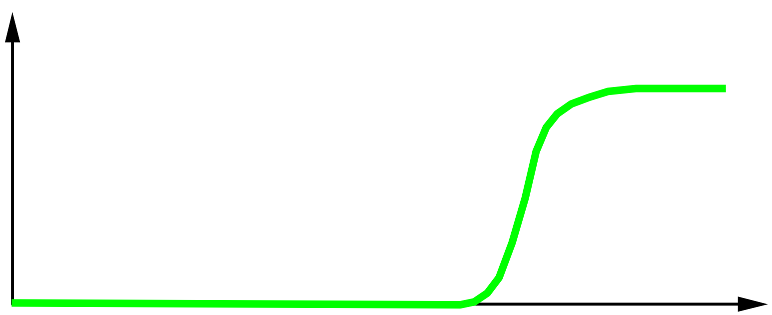
# Rodzaje filtrów



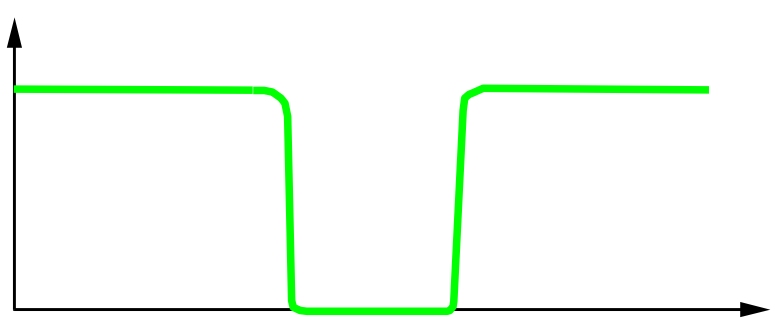

Filtr dolnoprzepustowy



Filtr środkowoprzepustowy



Filtr górnoprzepustowy

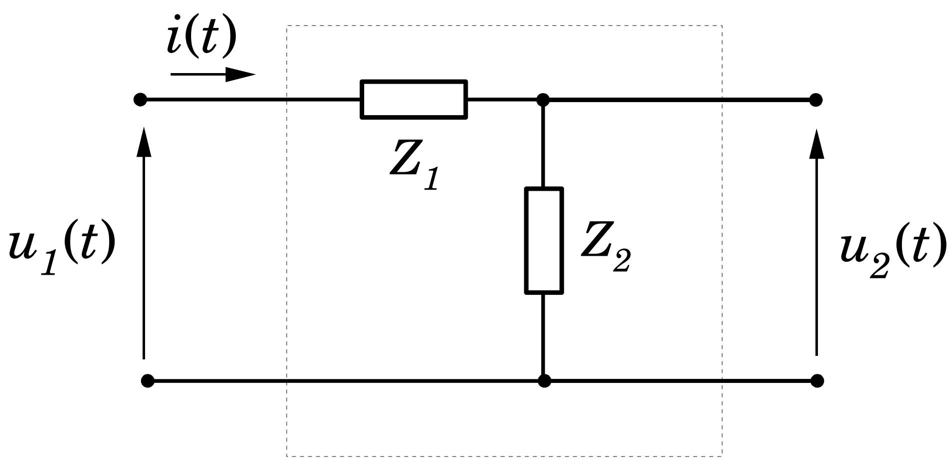


Filtr środkowozaporowy

# Czwórniki liniowe bierne

Czwórniki te zbudowane są z elementów *R, L, C*.

Rozważamy czwórniki zawierające impedancje $Z_1$ oraz $Z_2$ , połączone według nastepującego schematu:




Dla sygnałów sinusoidalnych:

$$\tilde{u}_1(\omega t) = U_1 \mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi_1)}$$

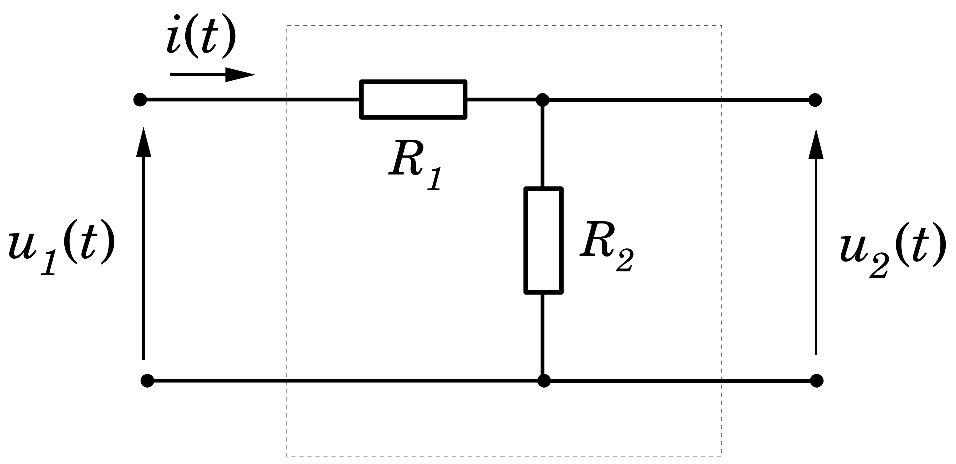
$$\tilde{u}_2(\omega t) = Z_2(\omega)\, \tilde{i}(\omega t) = Z_2(\omega) \frac{\tilde{u}_1(\omega t)}{Z_1(\omega) + Z_2(\omega)}$$

$$\tilde{u}_2(\omega t) = T(\omega)\, \tilde{u}_1(\omega t)$$

$$\boxed{T(\omega) = \frac{Z_2(\omega)}{Z_1(\omega) + Z_2(\omega)}}$$

Czwórnik ten nazywany jest filtrem typu Γ lub też uogólnionym dzielnikiem napięcia.

# Czwórnik RR (dzielnik napięcia)



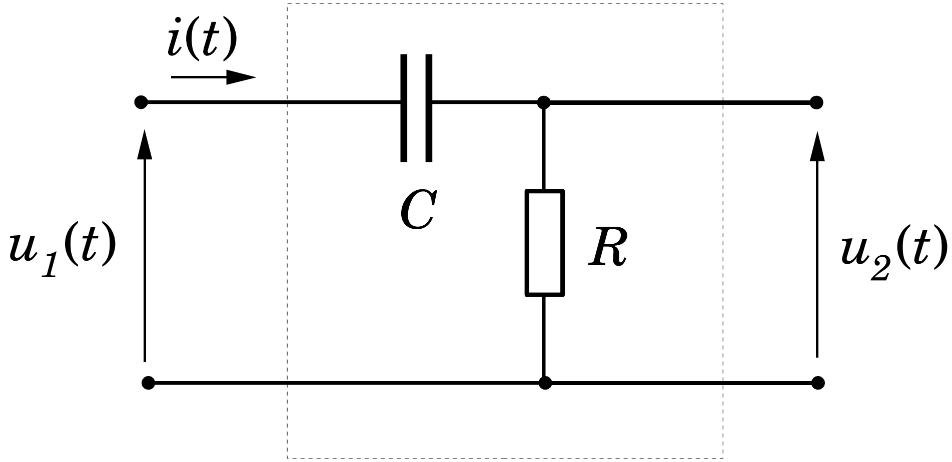

Dla sygnałów o dowolnych przebiegach czasowych:

$$\boxed{u_2(t) = R_2\, i(t) = R_2 \frac{u_1(t)}{R_1 + R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_1(t)}$$

$$Z_1(\omega) = R_1 = \mathrm{const}(\omega)$$
$$Z_2(\omega) = R_2 = \mathrm{const}(\omega)$$

$$\boxed{T = \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

# Czwórnik CR – filtr górnoprzepustowy
# – układ różniczkujący




$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C}$$

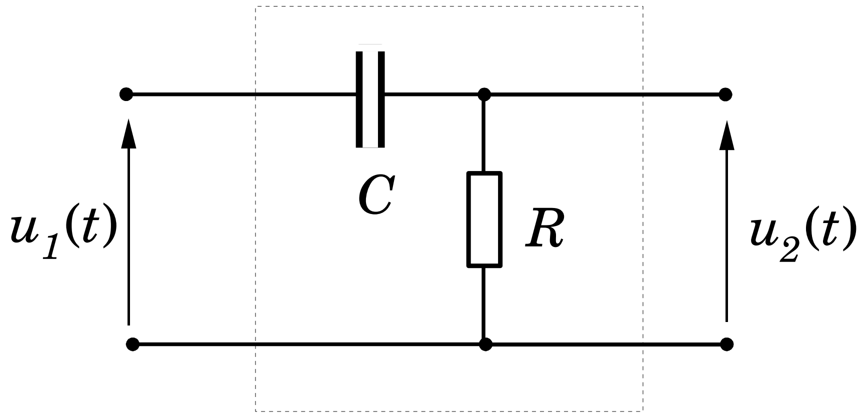
$$Z_2 = R$$

$$T(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

gdzie: $\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$

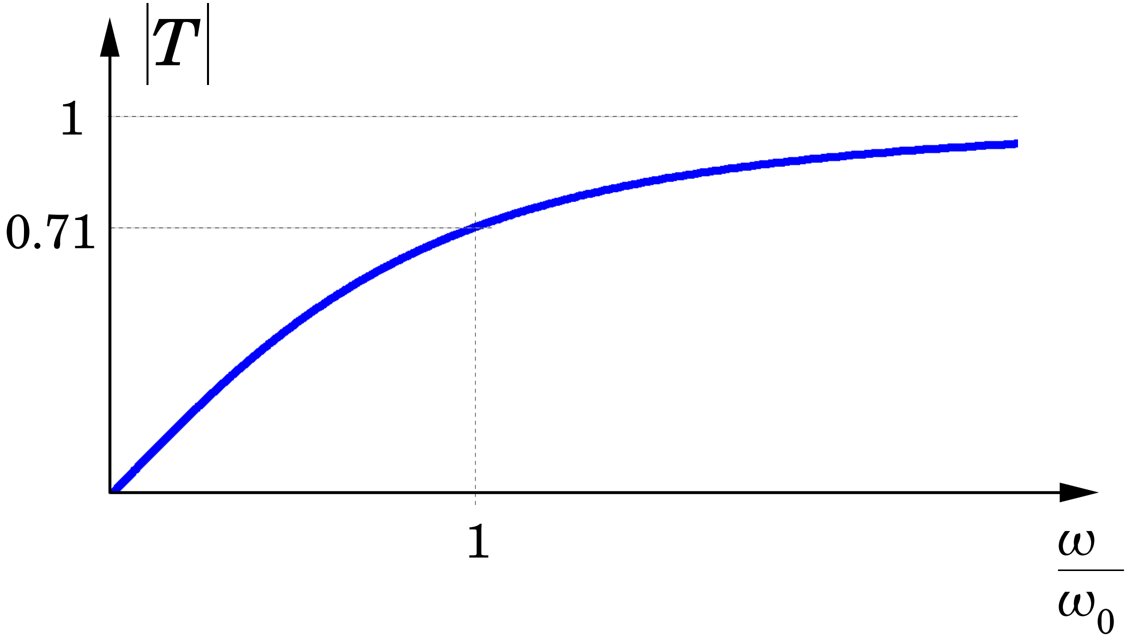
$\tau = RC$ (stała czasowa)

# Czwórnik CR – charakterystyka amplitudowa

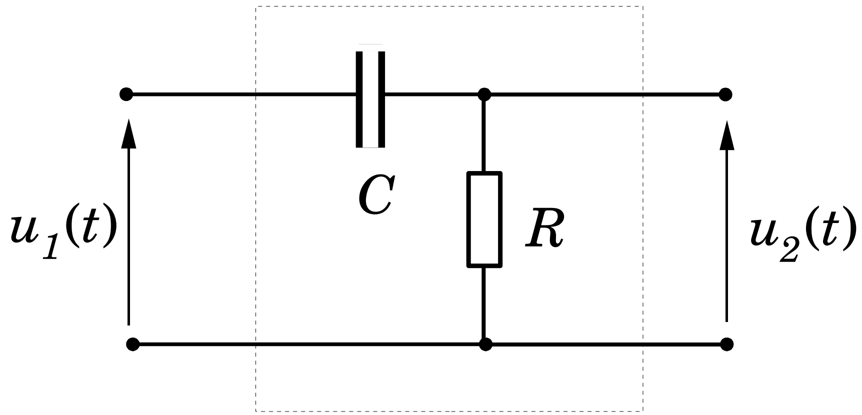



$$T(\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$|T(\omega)| = \sqrt{\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

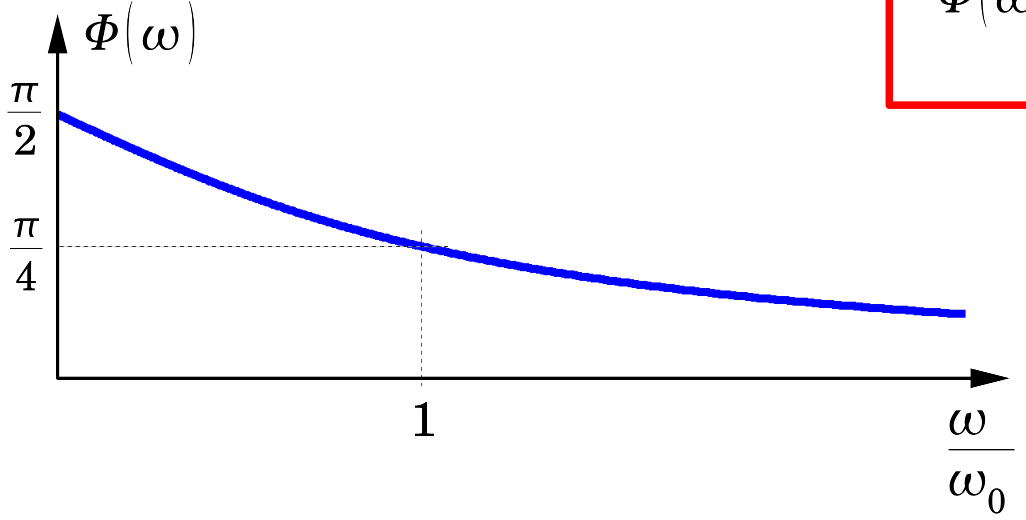


# Czwórnik CR – charakterystyka fazowa

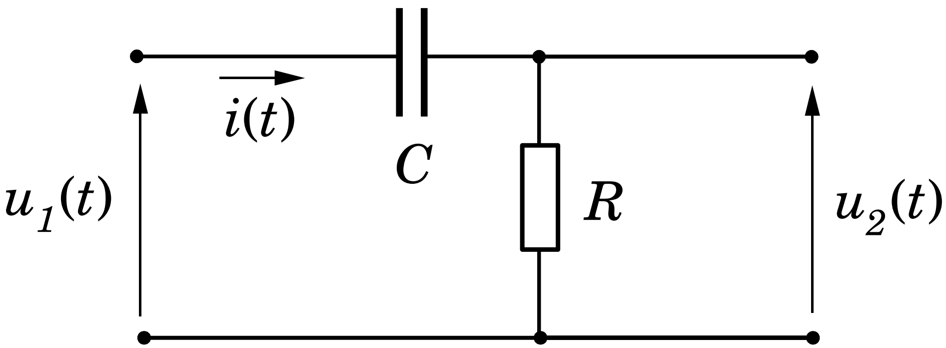



$$T(\omega) = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\Phi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im} T(\omega)}{\operatorname{Re} T(\omega)}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$



# Czwórnik CR : Przechodzenie sygnałów o dowolnym kształcie




$Q$ – ładunek na okładce kondensatora

$$u_1(t) = \frac{Q(t)}{C} + u_2(t)$$

różniczkując względem czasu oraz uwzględniając, że $\dfrac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = i(t)$

$$\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{i(t)}{C} + \frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t}$$

, ponieważ $i(t) = \dfrac{u_2(t)}{R}$ otrzymujemy:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{u_2(t)}{RC} + \frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t}}$$

Rozwiązując to równanie różniczkowe znajdujemy odpowiedź $u_2(t)$ na zadany sygnał wejściowy $u_1(t)$.

Dla małych stałych czasowych $RC$, przy powolnych zmianach napięcia w czasie:

$$\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} \simeq \frac{u_2(t)}{RC}$$

czyli

$$\boxed{u_2(t) \simeq \tau \frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t}}$$

Napięcie wyjściowe śledzi zróżniczkowany sygnał wejściowy. Dlatego nazwa:

**układ różniczkujący**

# Układ różniczkujący :

## Przechodzenie impulsów prostokątnych

$$u_1(t) = 0 \quad \text{dla} \quad t<0 \ \text{ i } \ t>t_p$$
$$u_1(t) = U \quad \text{dla} \quad 0<t<t_p$$

$$\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{u_2(t)}{\tau} + \frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t}, \qquad \tau = RC$$

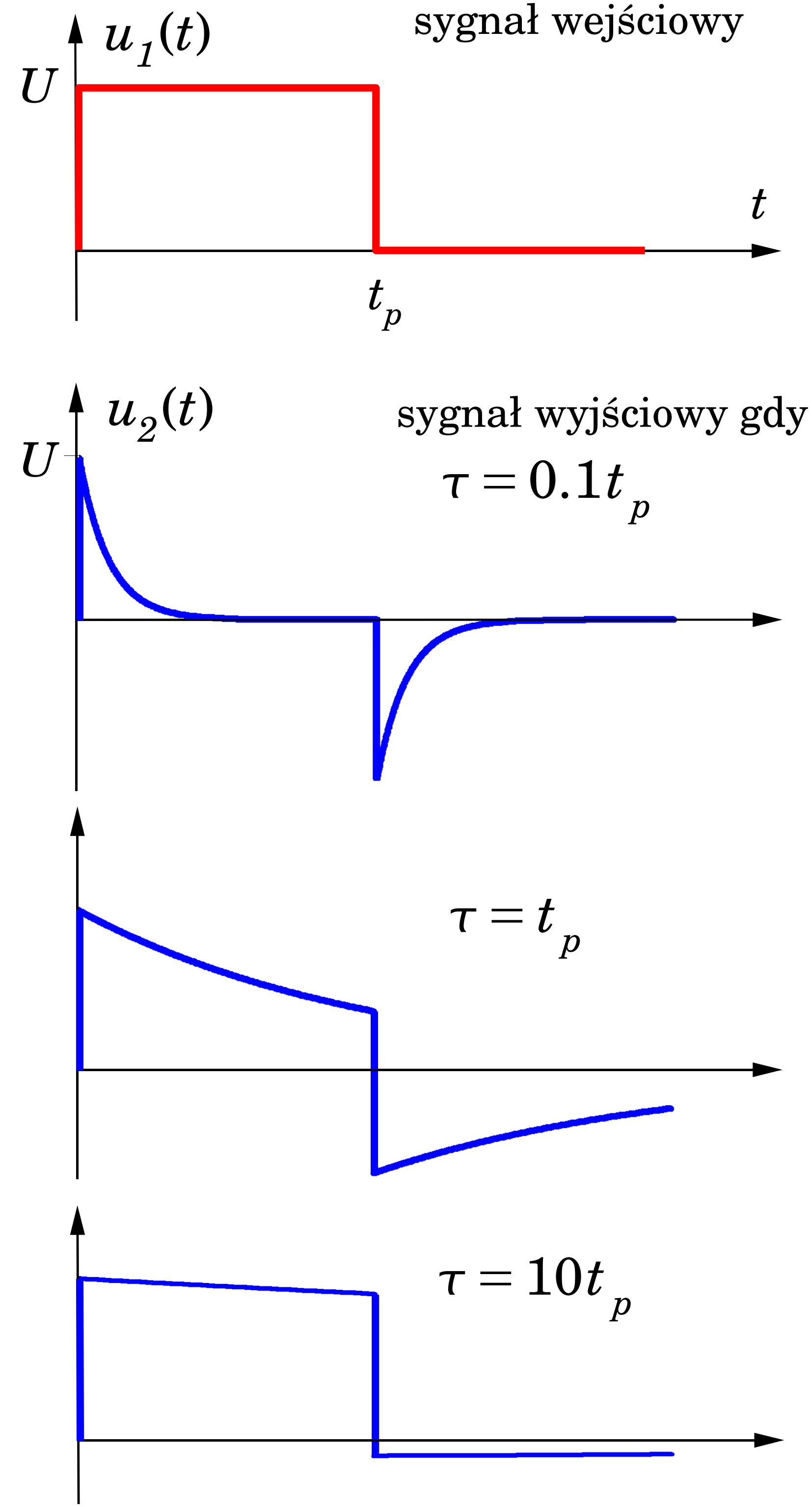
Poza punktami $t = 0$ oraz $t = t_p$ :

$$\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{u_2(t)}{\tau} + \frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t}$$

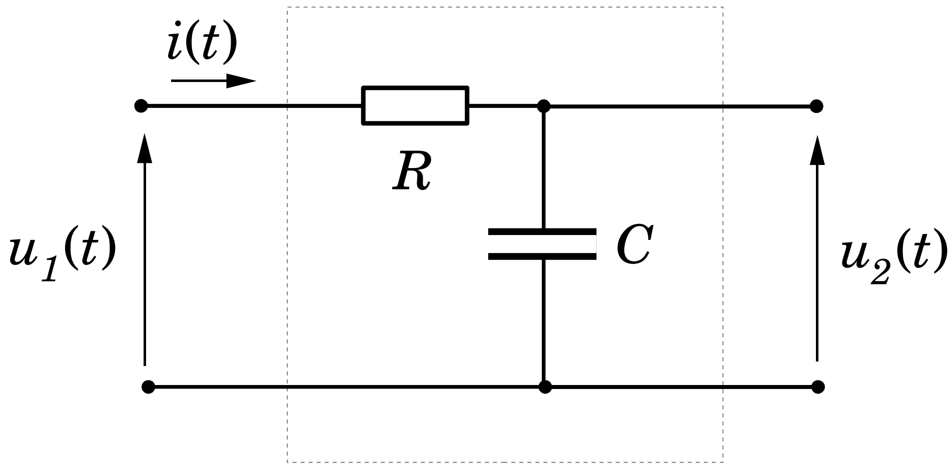
$$\Rightarrow \quad u_2(t) = -\tau \frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t}$$

Rozwiązując to równanie z uwzględnieniem warunków początkowych otrzymujemy:

$$u_2(t) = U\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{dla} \quad 0 < t < t_p$$
$$u_2(t) = U\left(1 - \mathrm{e}^{t_p/\tau}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{dla} \quad t > t_p$$



# Czwórnik RC – filtr dolnoprzepustowy – układ całkujący




$$Z_1 = R$$

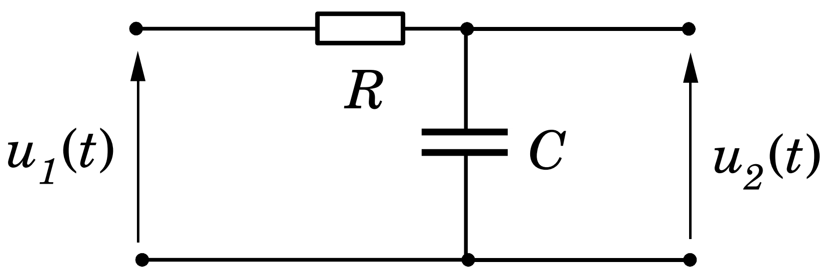
$$Z_2 = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\boxed{T(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}}$$

gdzie: $\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$

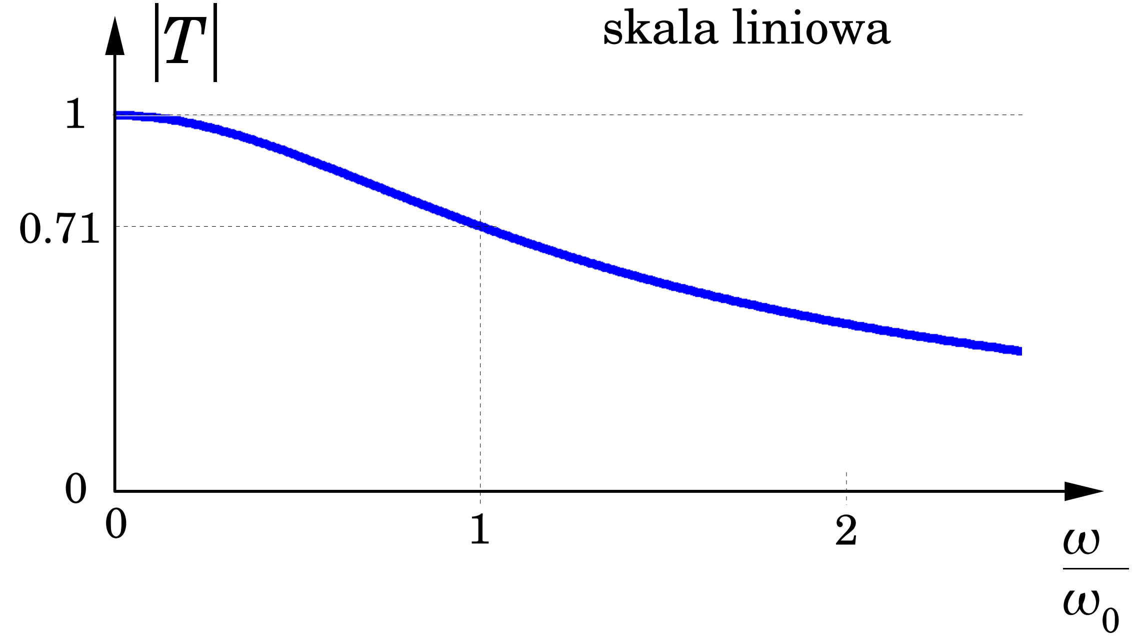
$\tau = RC$ (stała czasowa)

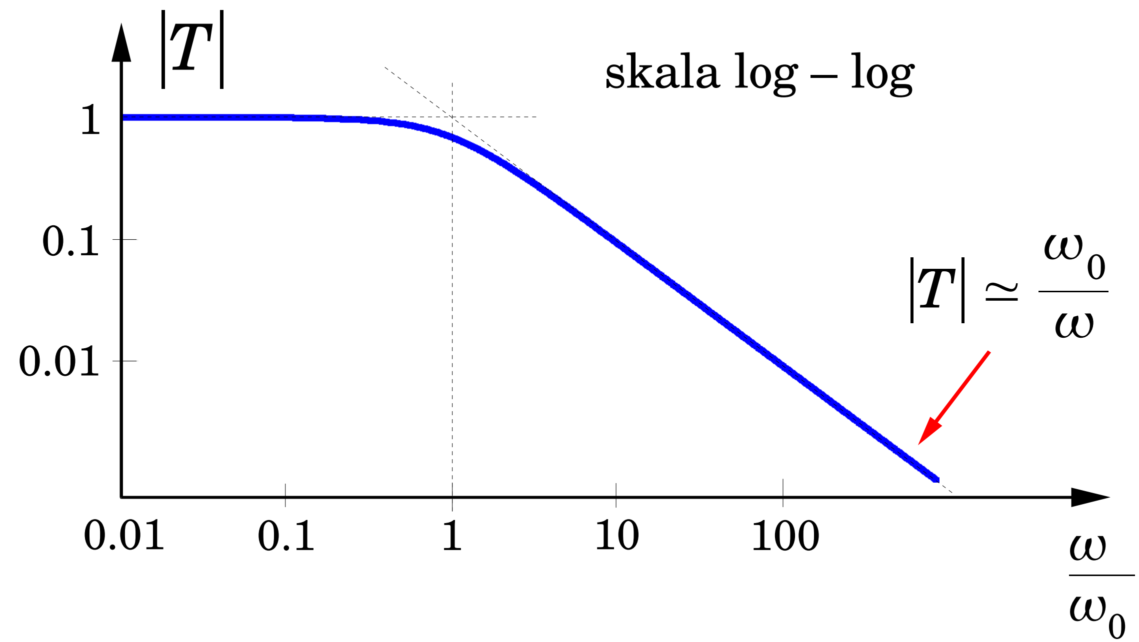
# Czwórnik RC – charakterystyka amplitudowa



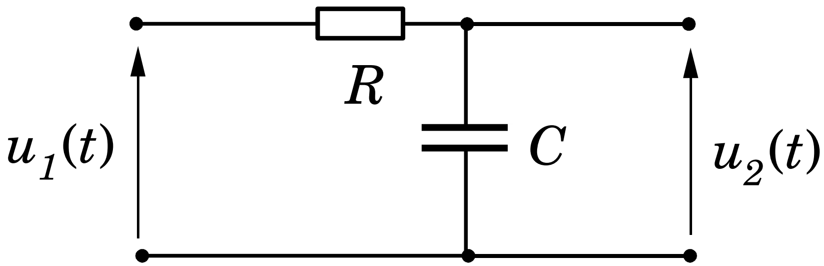

$$T(\omega) = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

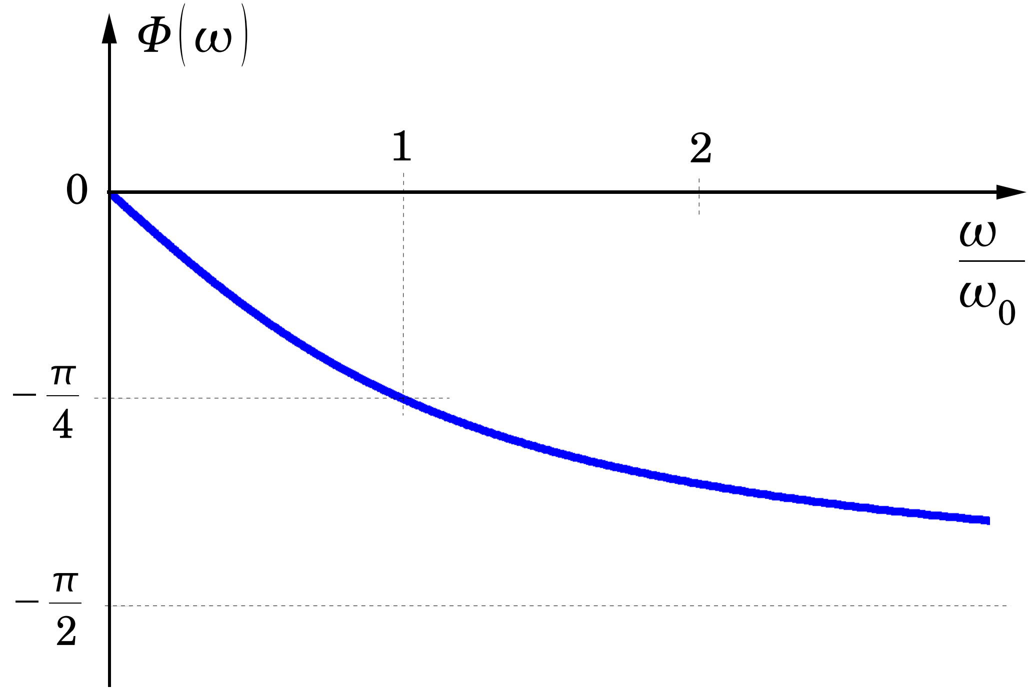
$$|T(\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$



# Czwórnik RC – charakterystyka fazowa

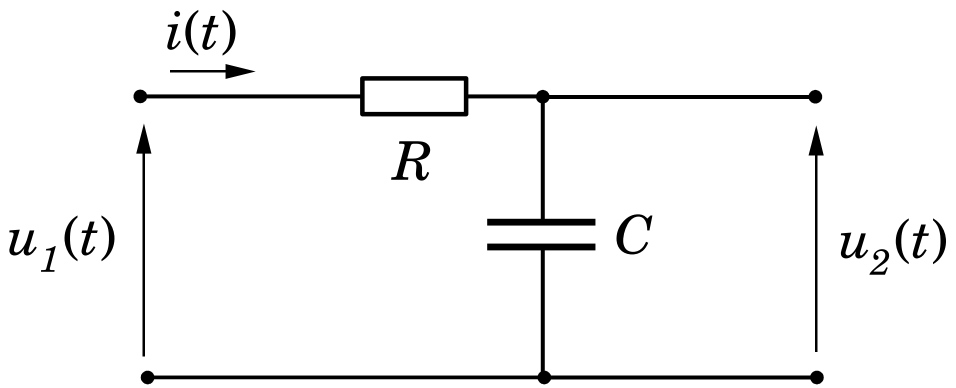



$$T(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1-j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\Phi(\omega) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}\,T}{\mathrm{Re}\,T}\right) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

# Czwórnik RC : Przechodzenie sygnałów o dowolnym kształcie




$Q$ – ładunek na okładce kondensatora

$$u_1(t) = Ri(t) + u_2(t)$$

uwzględniając, że $i(t) = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t}$ otrzymujemy:

$$\boxed{u_1(t) = RC\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} + u_2(t) = \tau\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} + u_2(t)}$$

Gdy $\left|\tau\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t}\right| \gg |u_2(t)|$ (duża częstotliwość, duża stała czasowa) wówczas:

$u_1(t) \simeq \tau\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t}$ czyli $\boxed{u_2(t) \simeq \frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t} u_1(t')\mathrm{d}t'}$

Napięcie wyjściowe śledzi scałkowany sygnał wejściowy. Dlatego nazwa:

**układ całkujący**

# Układ całkujący :

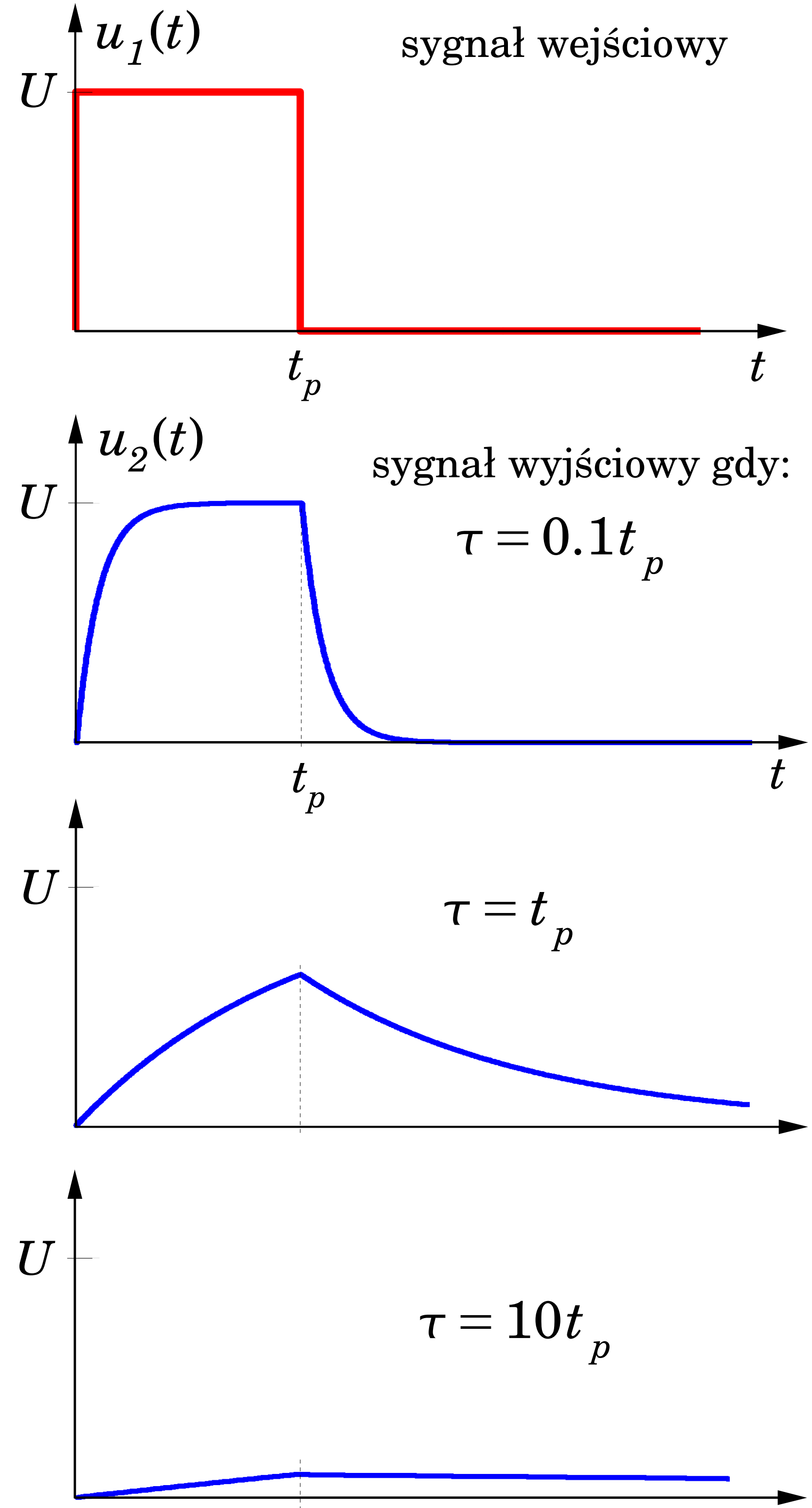
## Przechodzenie impulsów prostokątnych

$$u_1(t) = 0 \quad \text{dla} \quad t<0 \ \text{ i } \ t>t_p$$
$$u_1(t) = U \quad \text{dla} \quad 0<t<t_p$$

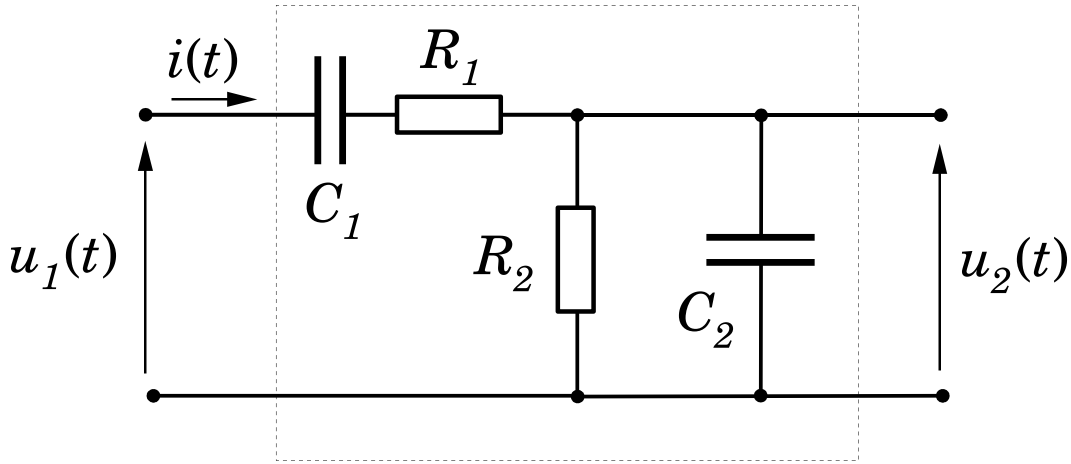
$$u_1(t) = \tau \frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} + u_2(t), \qquad \tau = RC$$

Rozwiązując to równanie z uwzględnieniem warunków początkowych otrzymujemy:

$$u_2(t) = U\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \qquad \text{dla} \quad 0 < t < t_p$$
$$u_2(t) = U\left(\mathrm{e}^{t_p/\tau} - 1\right)\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{dla} \quad t > t_p$$



# Czwórnik Wiena – filtr środkowo-przepustowy
# – układ różniczkująco-całkujący

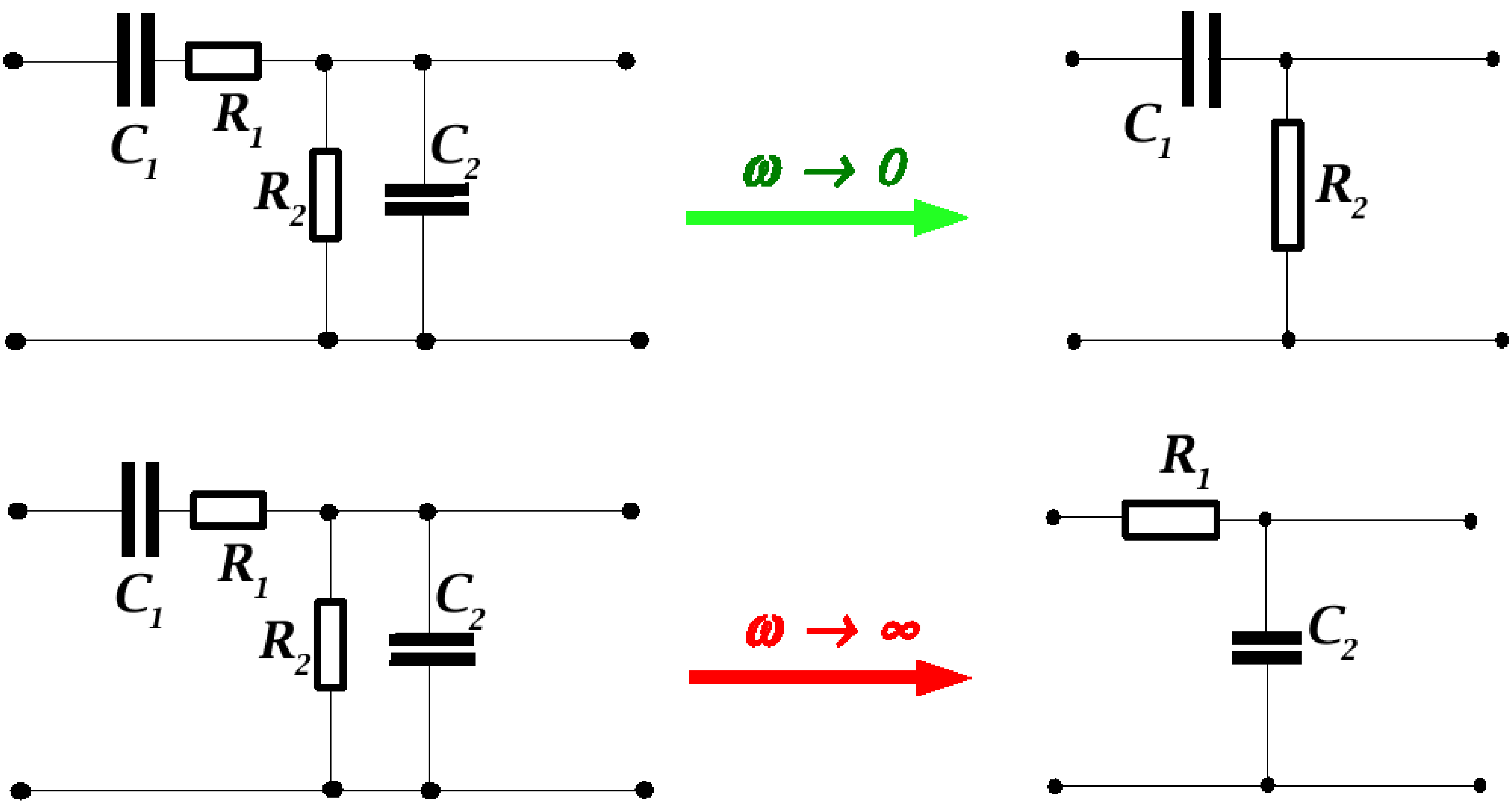



$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}$$

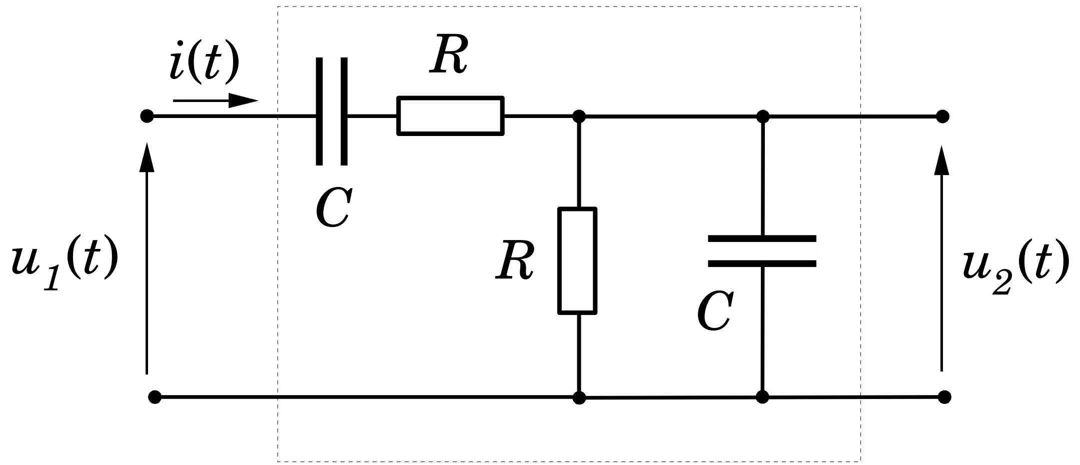
$$Z_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C_2}$$

$$\boxed{T(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \ldots}$$

# Czwórnik Wiena – filtr środkowo-przepustowy
# – układ różniczkująco-całkujący



# Symetryczny czwórnik Wiena




$$Z_1 = R + \frac{1}{j\omega C}$$

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R} + j\omega C$$

$$T(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{\frac{Z_1}{Z_2} + 1} = \frac{1}{3 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{3 - j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}{9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

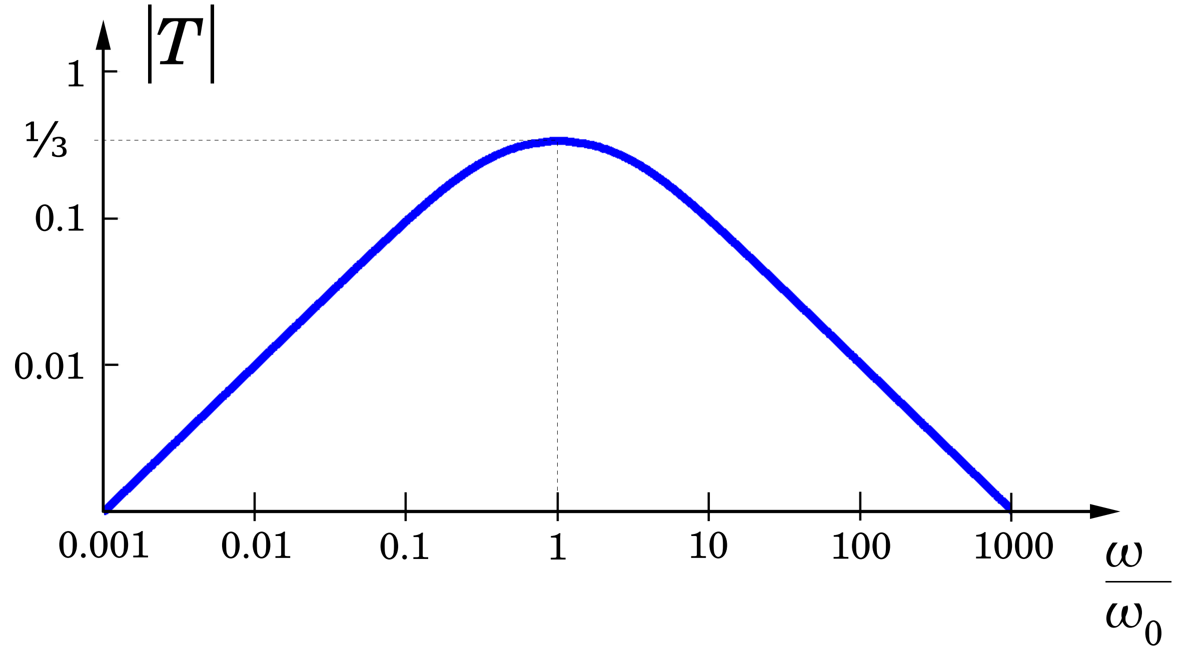
$$\left|T(\omega)\right| = \sqrt{T\,T^*} = \sqrt{\frac{1}{9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$\Phi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im} T}{\operatorname{Re} T}\right) = \operatorname{arctg}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]$$

# Symetryczny czwórnik Wiena – charakterystyka częstotliwościowa

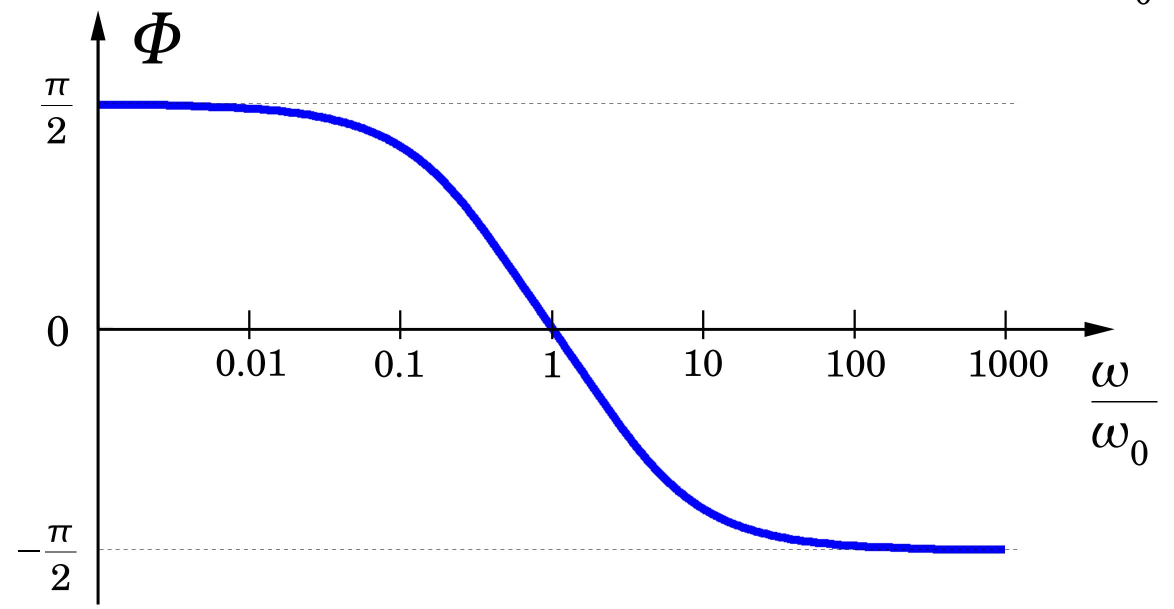
## Charakterystyka amplitudowa

$$\left|T(\omega)\right| = \sqrt{\frac{1}{9+\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

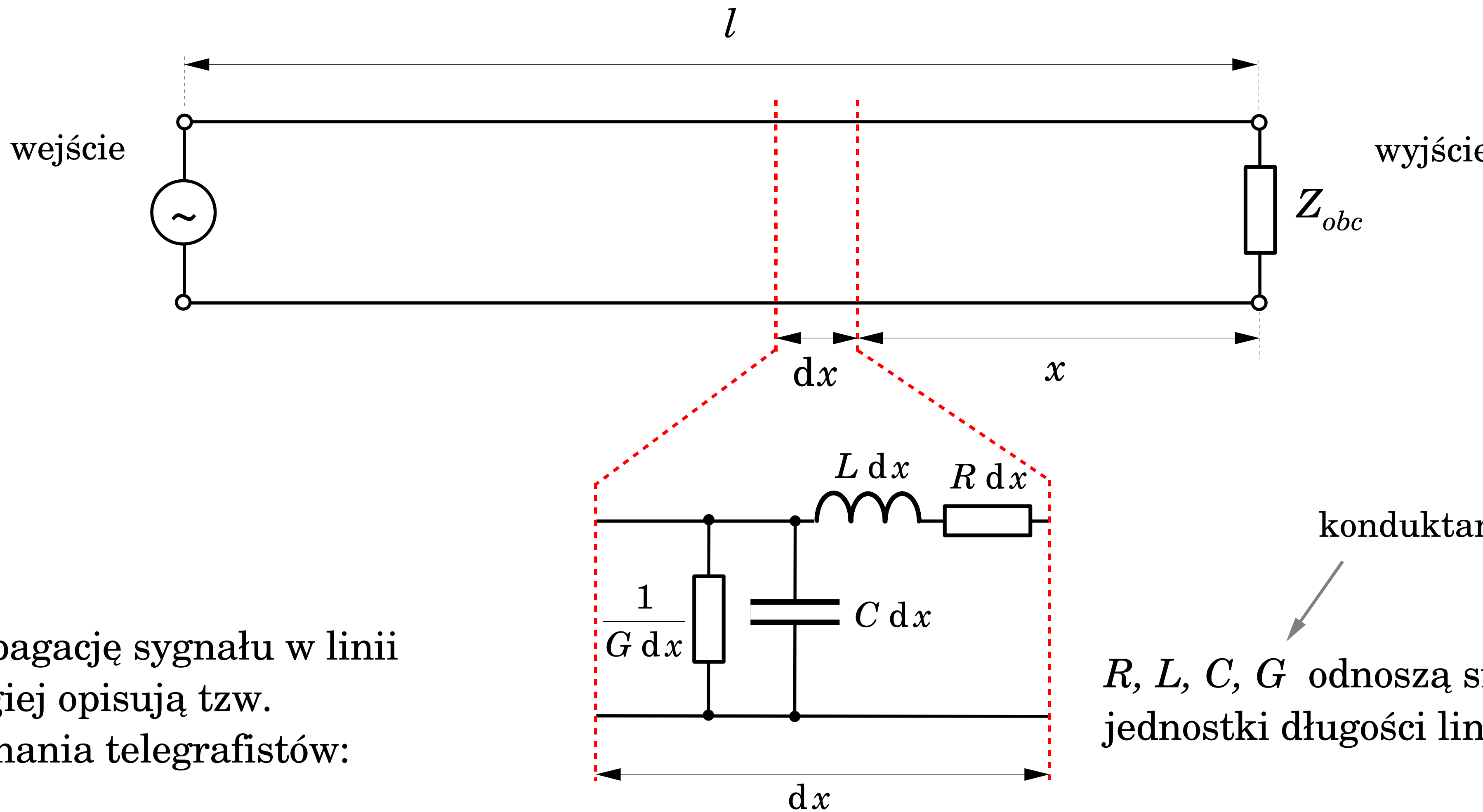



## Charakterystyka fazowa

$$\Phi(\omega) = \mathrm{arctg}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]$$



# Czwórniki o elementach rozłożonych: Linia długa




konduktancja

$R$, $L$, $C$, $G$ odnoszą się do jednostki długości linii

Propagację sygnału w linii długiej opisują tzw. równania telegrafistów:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + R\,i(x,t)$$

$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = C\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + G\,u(x,t)$$

$u(x,t)$, $i(x,t)$ – uogólnione napięcie i prąd (zespolone)

# Linia długa

Jeżeli na wejściu linii sygnał sinusoidalny, całkowanie równań telegrafistów daje:

$$i(x,t)=\frac{1}{Z_0}\left(A_1 e^{\gamma x}-A_2 e^{-\gamma x}\right)e^{j\omega t}$$

$$u(x,t)=\left(A_1 e^{\gamma x}+A_2 e^{-\gamma x}\right)e^{j\omega t}$$

fala biegnąca (od wej. do wyj.)

fala odbita (od wyj. do wej.)

gdzie: $A_1,\ A_2$ – stałe całkowania

$Z_0=\sqrt{\dfrac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}$ – impedancja charakterystyczna linii

$\gamma=\sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}$ – stała propagacji linii (bezwymiarowa)

Zapisując stałą propagacji w postaci $\gamma=a+jb$ otrzymujemy:

$$u(x,t)=\underbrace{A_1 e^{ax}}_{\text{amplituda fali biegnącej}} e^{j\omega\left(t+\frac{b}{\omega}x\right)}+\underbrace{A_2 e^{-ax}}_{\text{amplituda fali odbitej}} e^{j\omega\left(t-\frac{b}{\omega}x\right)}$$

Prędkość fali biegnącej i odbitej:

$$v_f=\frac{\omega}{b}$$

# Linia długa

Linie długie (np. kable) są tak projektowane, aby $R << \omega L$ oraz $G << \omega C$ dla używanego zakresu częstości $\omega$. Można wtedy taką linię traktować jako **linię bez strat** : $R = 0$, $G = 0$.

Wówczas: $a = 0$ oraz $b = \omega\sqrt{LC}$

amplitudy fal padającej i odbitej nie zależą od $x$

$$v_f = \frac{\omega}{b} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ nie zależy od $\omega$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$ wartość rzeczywista (rezystancja)

W liniach ze stratami:

fala padająca i odbita są tłumione (czynniki $e^{ax}$, $e^{-ax}$)

prędkości fal zależą od ich częstości

$Z_0$ jest zespolone

# Linia długa

W linii jednorodnej fala wsteczna może powstać jedynie w wyniku odbicia fali od końca linii. Stosunek amplitudy fali odbitej do amplitudy fali padającej określony jest przez współczynnik odbicia:

$$\boxed{\rho = \frac{A_2}{A_1} = \frac{Z_{obc} - Z_0}{Z_{obc} + Z_0}}$$

Wyróżnić można następujące przypadki szczególne:

$Z_{obc} = Z_0 \Rightarrow \rho = 0$

Mówimy, że linia jest zwarta prawidłowo (lub dopasowana). Brak jest odbić od końca linii, mamy tylko sygnał od źródła do odbiornika.

$Z_{obc} = \infty \Rightarrow \rho = 1$

Linia rozwarta, sygnał odbija się z taką samą amplitudą.

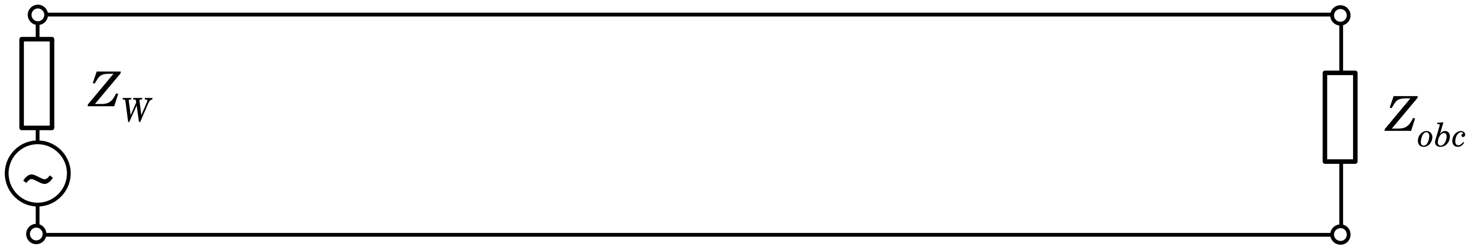
$Z_{obc} = 0 \Rightarrow \rho = -1$

Linia jest „krótko zwarta”. Obserwujemy całkowite odbicie sygnału z jego inwersją.

Gdy linia nie jest zwarta prawidłowo odbicia na końcach linii utrudniają lub uniemożliwiają obserwację właściwego sygnału.

# Zastosowania linii długiej

## Przesyłanie sygnałów:




Do przesyłania sygnałów stosuje się najczęściej kable koncentryczne. Są one tak wykonywane aby $Z_0 \simeq \sqrt{L/C}$ (kilkadziesiąt – kilkaset omów). Dla uzyskania maksymalnego przekazu mocy musi być spełniony warunek $Z_W = Z_0$. Aby nie było odbić musi być $Z_{obc} = Z_0$. W linii bez strat sygnały są przenoszone bez tłumienia i zniekształceń.

## Opóźnianie impulsów – linie opóźniające:

Dla linii bez strat

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad t(l) = l\sqrt{LC} = \frac{l}{c}\sqrt{\epsilon}$$

$c$ – prędkość światła

$\epsilon$ – przenikalność dielektryczna izolatora kabla

Dla typowych kabli $t(l) \sim 5$ ns/m.

## Formowanie impulsów:

Przy pomocy linii długiej można dokonać formowania impulsów, a więc zmiany ich kształtu. Wykorzystuje się efekt odbicia sygnału na końcu linii (np. linii krótko-zwartej) i interferencji fali odbitej z falą padającą.