WSTĘP DO ELEKTRONIKI

Część II

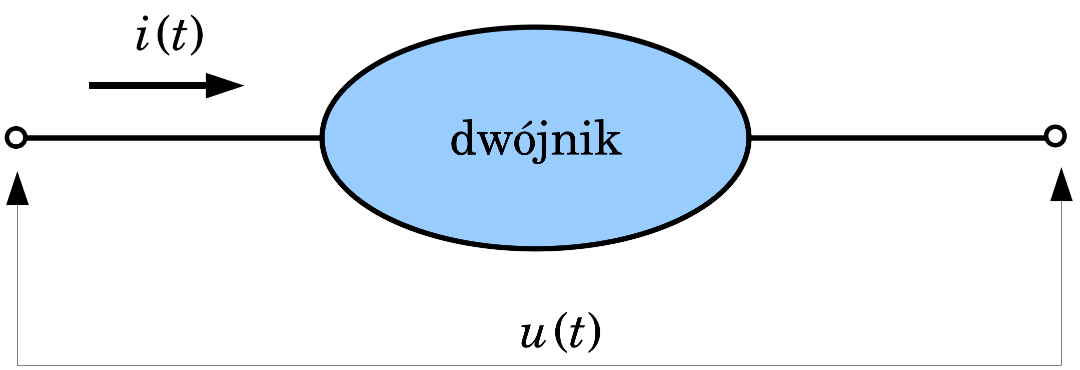
Podstawowe elementy elektroniczne – dwójniki bierne *RLC*
Formalizm zespolony opisu napięć i prądów harmonicznie zmiennych w czasie – impedancja
Źródła napięcia i prądu
Przekazywanie maksymalnej mocy pomiędzy układami

Janusz Brzychczyk IF UJ

Podstawowe elementy elektroniczne

Dwójniki

Dwójnikiem nazywamy układ posiadający dwa zaciski elektryczne.



Parametrami elektrycznymi dwójnika są:
prąd płynący przez dwójnik - $i(t)$
napięcie na jego zaciskach - $u(t)$

Dwójniki

W dwójniku wyróżnia się parametry wejściowe (wymuszenie, pobudzenie) i parametry wyjściowe (odpowiedź).

Jeżeli np. napięcie U jest parametrem wyjściowym będącym reakcją na przepływający prąd I oraz określone wielkości P_i (np. temperatura, natężenie światła...), to relację pomiędzy nimi można zapisać w postaci:

$$U = T\left(I\,, P_i\right)$$

gdzie wielkość T jest funkcją lub operatorem.

W ogólnym przypadku parametry dwójnika mogą zależeć od czasu t .

Dwójniki liniowe i stacjonarne

Układ (dwójnik) jest **liniowy** gdy spełnia dwie własności:

jednorodności, co oznacza, że jeżeli parametr (sygnał) wejściowy $x(t)$ zostanie przeskalowany, to uzyskany parametr (sygnał) wyjściowy $y(t)$ będzie przeskalowany z takim samym współczynnikiem:

$$T\left[a\cdot x(t)\right] = a\cdot T\left[x(t)\right] = a\cdot y(t)$$

addytywności – odpowiedź układu na sumę wymuszeń jest równa sumie odpowiedzi na każde wymuszenie osobno:

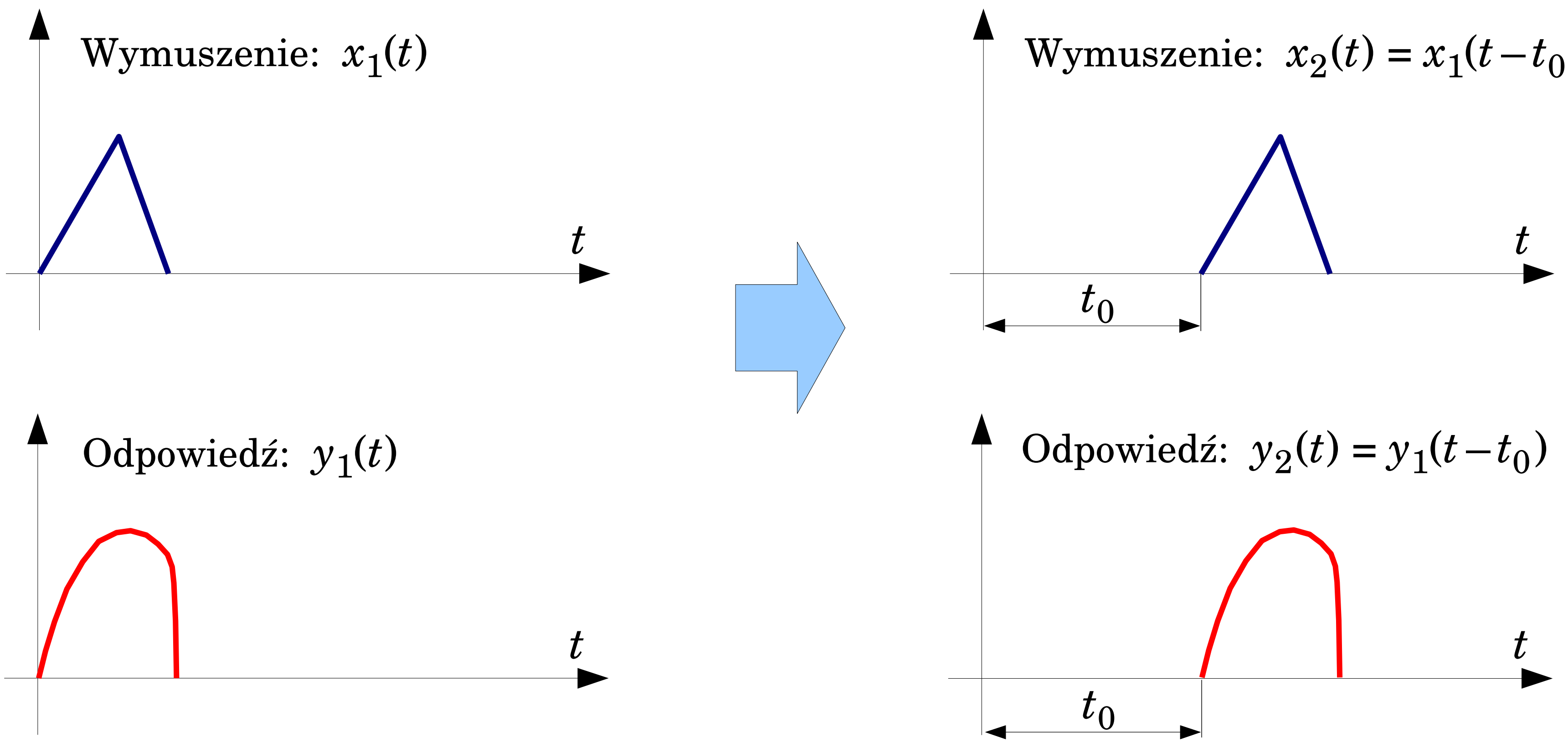
$$T\left[x_1(t)+x_2(t)\right] = T\left[x_1(t)\right]+T\left[x_2(t)\right] = y_1(t)+y_2(t)$$

Jeżeli $y_1(t)$ jest odpowiedzią na wymuszenie $x_1(t)$,
natomiast $y_2(t)$ na $x_2(t)$,
to $y(t) = a_1\cdot y_1(t) + a_2\cdot y_2(t)$ będzie odpowiedzią
na wymuszenie $x(t) = a_1\cdot x_1(t) + a_2\cdot x_2(t)$

(a_1, a_2 - dowolne stałe)

Dwójniki liniowe i stacjonarne

Układ **stacjonarny** (niezmienny w czasie) to układ w którym na przesunięte w czasie wymuszenie otrzymuje się przesuniętą w czasie odpowiedź o niezmienionym kształcie:



t_0 – dowolne przesunięcie w czasie

Dwójniki liniowe i stacjonarne

Z założenia liniowości i stacjonarności wynika :

Jeżeli wymuszenie ma postać:

$$x(t) = A\,\mathrm{e}^{pt}$$

gdzie p jest parametrem niezależnym od czasu,

to odpowiedź ma postać:

$$y(t) = C(p)\,\mathrm{e}^{pt}$$

gdzie C(p) zależy tylko od p i od rodzaju elementu.

Funkcja odpowiedzi:

$$T(p) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{C(p)\,\mathrm{e}^{pt}}{A\,\mathrm{e}^{pt}} = \frac{C(p)}{A}$$

Dwójniki liniowe i stacjonarne

Do opisu układów w przypadku gdy wymuszenie jest sygnałem sinusoidalnym, wygodnie jest stosować uogólniony formalizm wykorzystujący liczby zespolone.

Możemy wówczas przedstawić wymuszenie sinusoidalne w postaci $x(t) = A\,\mathrm{e}^{pt}$, przyjmując $p = \mathrm{j}\omega$, gdzie j jest jednostką urojoną, a $\omega = 2\pi f$ (f częstotliwość wymuszenia):

$$x(t) = A\,\mathrm{e}^{j\omega t}$$

Odpowiedzią układu liniowego i stacjonarnego na wymuszenie sinusoidalne jest sygnał sinusoidalny o tej samej częstotliwości:

$$y(t) = T(j\omega)A\,\mathrm{e}^{j\omega t}$$

Funkcja odpowiedzi T zależy od częstotliwości i charakteryzuje rodzaj układu.

Dwójniki bierne

Dwójnik, który nie posiada źródeł, nazywamy **dwójnikiem biernym** (pasywnym).
W elektronice wyróżniamy trzy rodzaje podstawowych dwójników biernych (liniowych i stacjonarnych): **rezystancję**, **pojemność** i **indukcyjność**.

Dla tych dwójników funkcja odpowiedzi $T(p)$ określająca reakcję napięcia $u(t)$ na przepływający przez dwójnik prąd $i(t) = I_0 \mathrm{e}^{pt}$ ma postać zespoloną:

$$T(p) = \frac{u(t)}{i(t)} \equiv Z(p)$$

W tym przypadku funkcję odpowiedzi nazywamy **impedancją** elementu i oznaczamy symbolem Z.

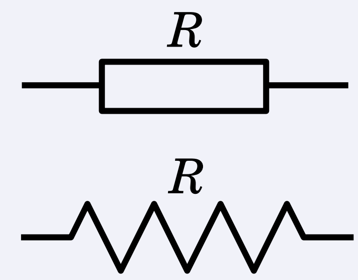
W szczególnym przypadku impedancja może być rzeczywista.
Tak jest dla rezystancji.

Rezystancja (idealny opornik)

Impedancja jest wielkością rzeczywistą, równą oporności R :

$$Z = R + \mathrm{j}0$$

Symbol:



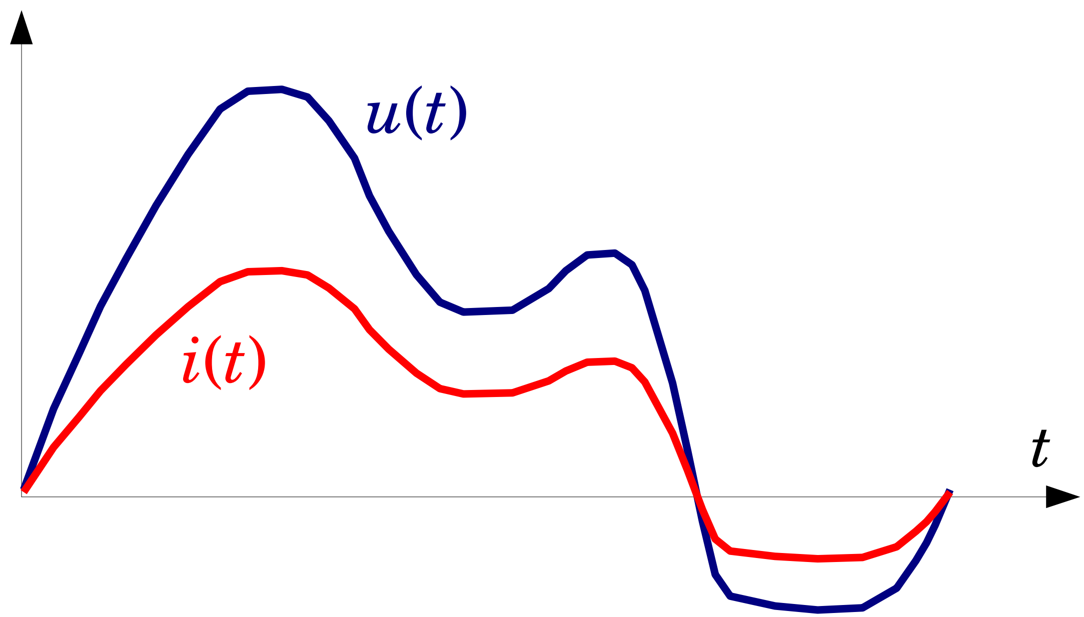
Relacja pomiędzy prądem i napięciem:

$$U = RI, \qquad u(t) = R\,i(t) \qquad \text{(Prawo Ohma)}$$

spełnione dla dowolnych przebiegów czasowych

Jednostka rezystancji:
Om (Ohm) [Ω]

$$1\Omega = \frac{1\mathrm{kg} \cdot 1\mathrm{m}^2}{1\mathrm{s}^3 \cdot 1\mathrm{A}^2} = \frac{1\mathrm{V}}{1\mathrm{A}}$$

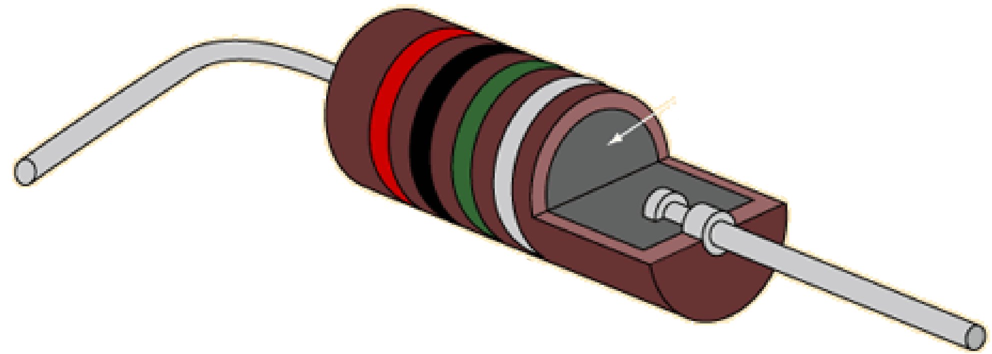


Dla przebiegów sinusoidalnych różnica faz pomiędzy napięciem a prądem wynosi 0.

Oporniki (rezystory)

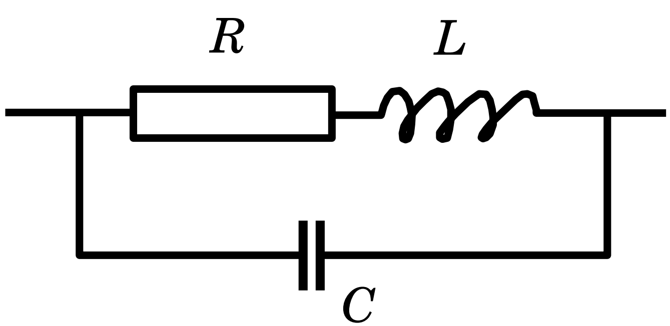
Rodzaje oporników:

drutowe
warstwowe
objętościowe



Opornik objętościowy (np. węglowy)

W rzeczywistości oporniki oprócz rezystancji R mają także pewną pojemność C oraz indukcyjność L. Te nieuknione dodatkowe wielkości (C, L) są na ogół pomijalnie małe, ale w pewnych warunkach, szczególnie przy wysokich częstotliwościach sygnałów, mogą odgrywać znaczącą rolę.



Parametry oporników

Rezystancja nominalna

Rezystancja podawana przez producenta na obudowie opornika.
Wartość rzeczywista rezystancji może się różnić od wartości nominalnej w granicach podanej tolerancji.

Tolerancja (klasa dokładności)

Podawana w procentach możliwa odchyłka rzeczywistej wartości oporu od wartości nominalnej.

Moc znamionowa

Maksymalna moc jaką opornik może przez dłuższy czas wydzielać w postaci ciepła bez wpływu na jego parametry.

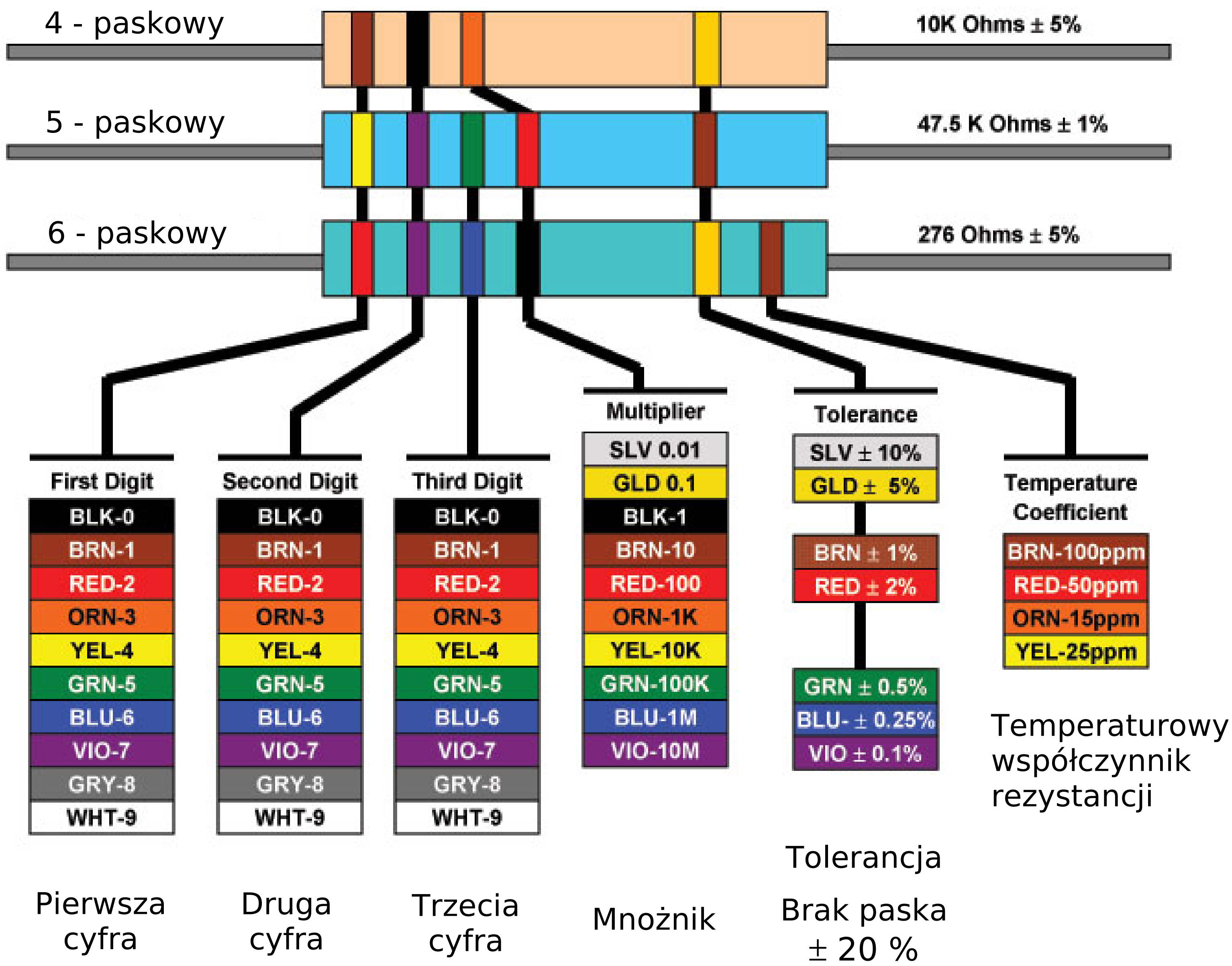
Napięcie graniczne

Maksymalne napięcie jakie można przyłożyć do opornika.

Temperaturowy współczynnik rezystancji

Współczynnik określający zmiany rezystancji pod wpływem zmian temperatury opornika.

Opornik – kod paskowy



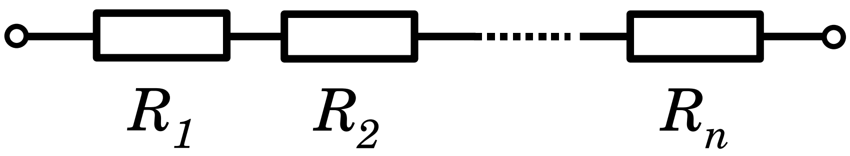
Kolory:

BLK – czarny
BRN – brązowy
RED – czerwony
ORN – pomarańczowy
YEL – żółty
GRN – zielony
BLU – niebieski
VIO – fioletowy
GRY – szary
WHT – biały

SLV – srebrny
GLD - złoty

Łączenie oporników

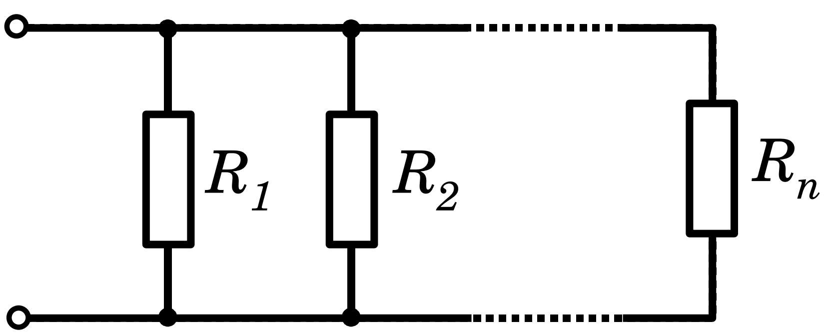
Połączenie szeregowe:



Rezystancja zastępcza R :

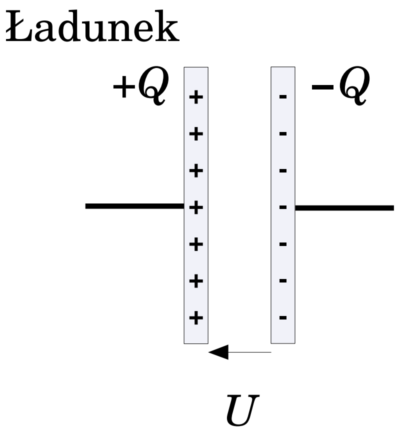
$$R = \sum_{k=1}^{n} R_k$$

Połączenie równoległe:



$$\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}$$

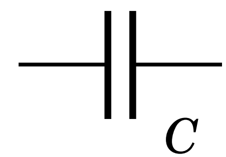
Kondensator – pojemność elektryczna



$$U = \frac{Q}{C}$$

C – pojemność kondensatora

Symbol:

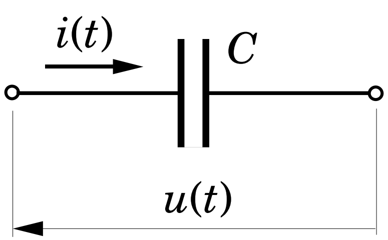


Jednostka pojemności:

Farad [F] = [C/V]

Energia zgromadzona w kondensatorze (polu elektrycznym):

$$W = \frac{1}{2} C U^2$$



$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = C\frac{du(t)}{dt}$$

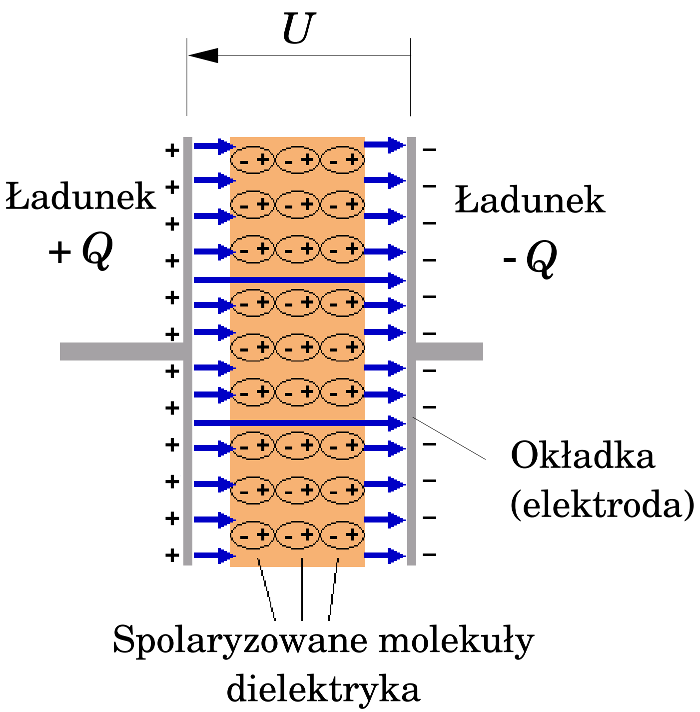
$$u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,\mathrm{d}t$$

Dla prądów sinusoidalnych

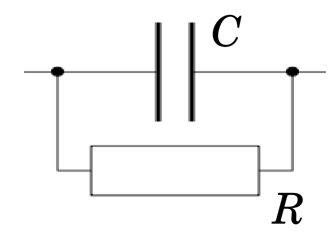
Impedancja:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

Kondensatory



Schemat zastępczy kondensatora rzeczywistego:



Rodzaje kondensatorów
(ze względu na rodzaj dielektryka):

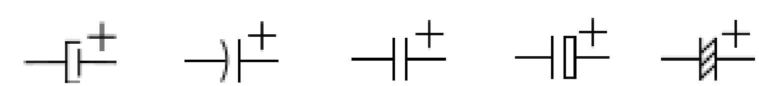
- ceramiczne, szklane
- foliowe (polistyrenowe, poliestrowe, poliwęglanowe)
- elektrolityczne (aluminiowe, tantalowe)
- próżniowe, powietrzne (stałe, zmienne)

Pojemność kondensatora płaskiego:

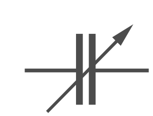
$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$$

ε_0 – przenikalność elektryczna próżni
ε_r – względna przenikalność elektryczna dielektryka
S – powierzchnia okładek kondensatora
d – odległość między okładkami

Symbole kondensatorów elektrolitycznych, które wymagają właściwej polaryzacji napięcia:

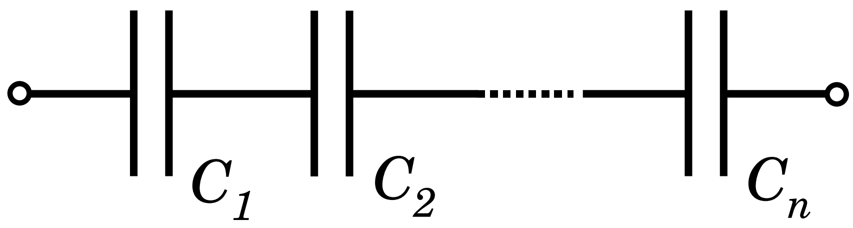


Symbol kondensatora o zmiennej pojemności:



Łączenie kondensatorów

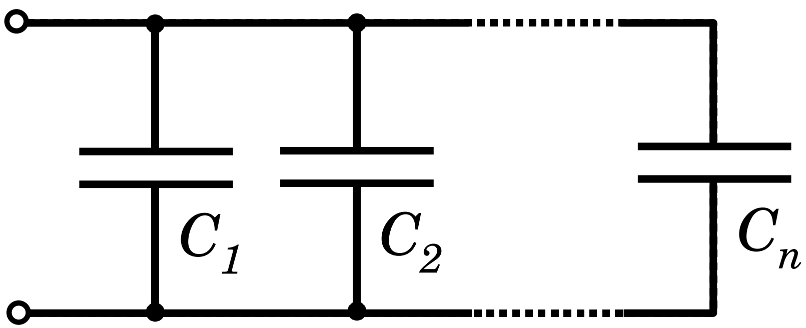
Połączenie szeregowe:



Pojemność zastępcza C :

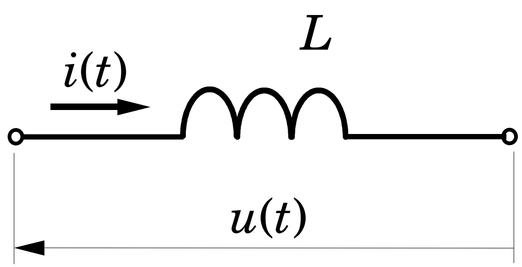
$$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k}$$

Połączenie równoległe:



$$C = \sum_{k=1}^{n} C_k$$

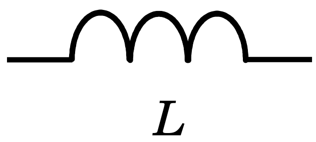
Cewka idealna – indukcyjność



$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

L – indukcyjność

Symbol:



Energia zgromadzona w cewce (polu magnetycznym):

$$W = \frac{1}{2}Li^2$$

Jednostka indukcyjności:

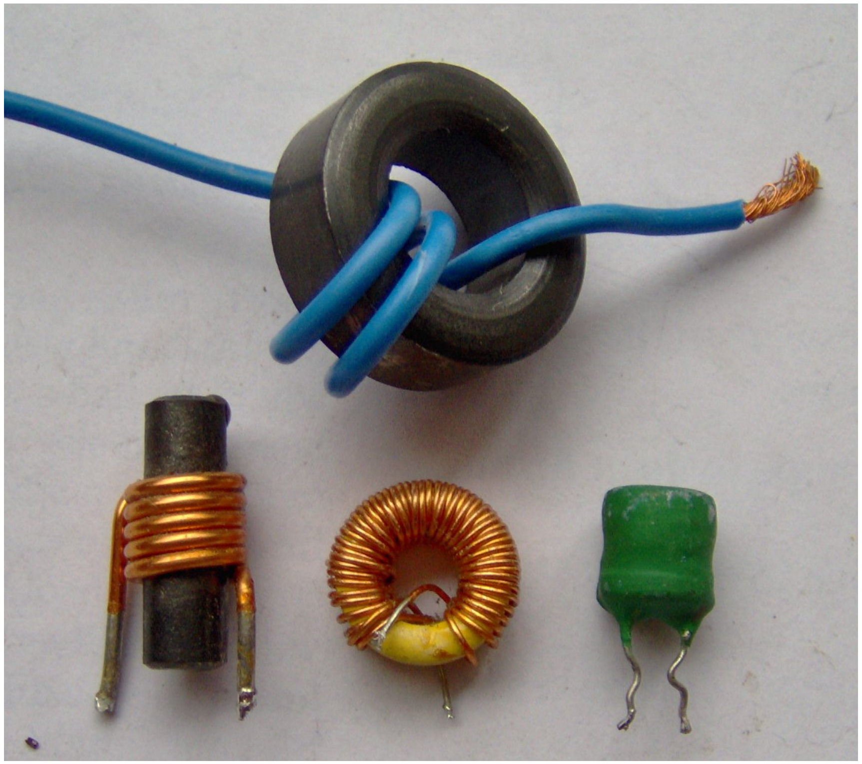
Henr [H] = [V·s/A]

Impedancja:

$$Z_L = j\omega L$$

Cewki indukcyjne

Cewka indukcyjna (solenoid, induktor, zwojnica)

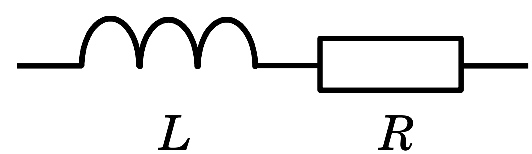


Indukcyjność cewki w kształcie walca (cylindrycznej):

$$L = \frac{\mu N^2 S}{l}$$

μ – przenikalność magnetyczna rdzenia cewki
N – liczba zwojów
S – powierzchnia przekroju cewki
l – długość cewki

Cewka rzeczywista:

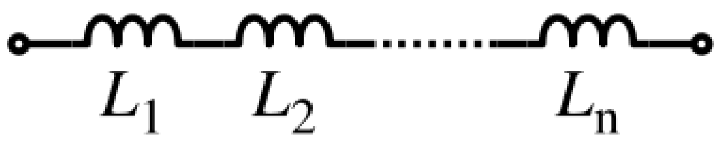


Rodzaje cewek:

ze względu na kształt: spiralne, cylindryczne, toroidalne
ze względu na sposób nawinięcia: jednowarstwowe, wielowarstwowe
ze względu na rdzeń: bezrdzeniowe (powietrzne), rdzeniowe
stałe, zmienne

Łączenie cewek

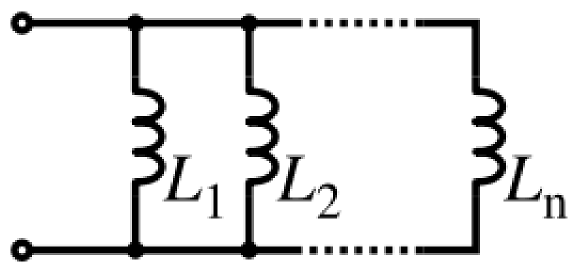
Połączenie szeregowe:



Indukcyjność zastępcza L :

$$L = \sum_{k=1}^{n} L_k$$

Połączenie równoległe:



$$\frac{1}{L} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{L_k}$$

Liczby zespolone

Liczba zespolona z :

$$z = x + j\,y = |z|\,e^{j\varphi} = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

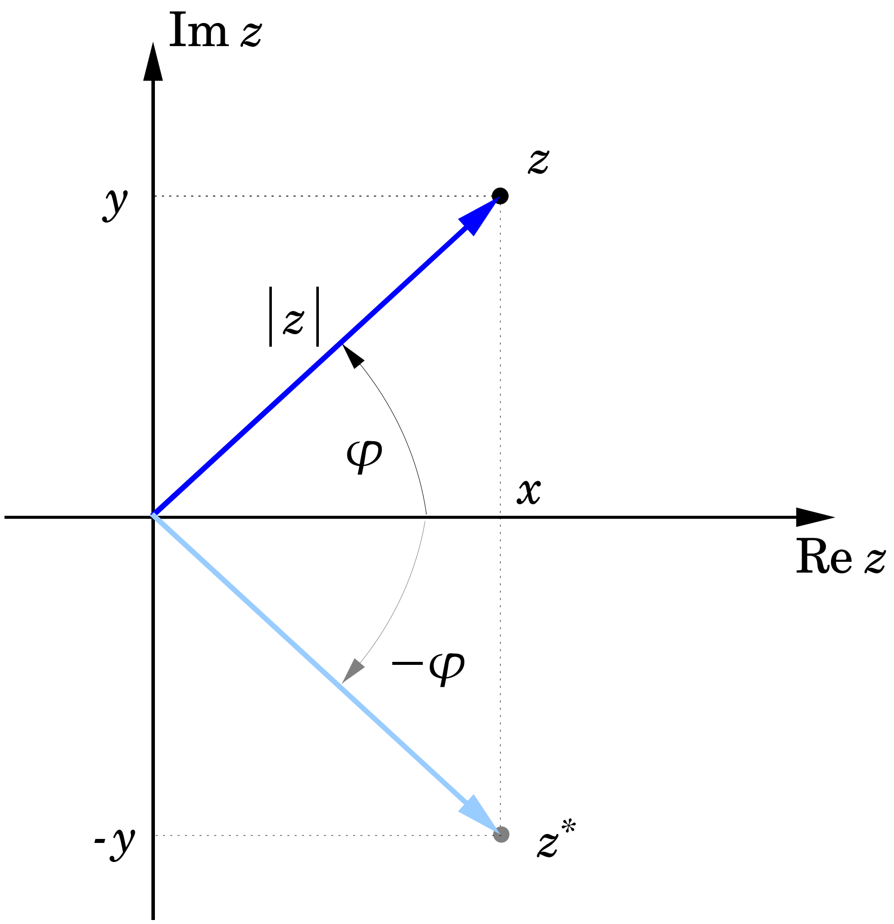
$x = \mathrm{Re}\,z$ – część rzeczywista
$y = \mathrm{Im}\,z$ – część urojona
j – jednostka urojona, $j^2 = -1$
$|z|$ – moduł
φ – faza (argument, kąt skierowany)

Liczba sprzężona do z :

$$z^* = x - j\,y = |z|\,e^{-j\varphi}$$

$$|z| = \sqrt{z\,z^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}$$



Impedancja zespolona dla prądów sinusoidalnych

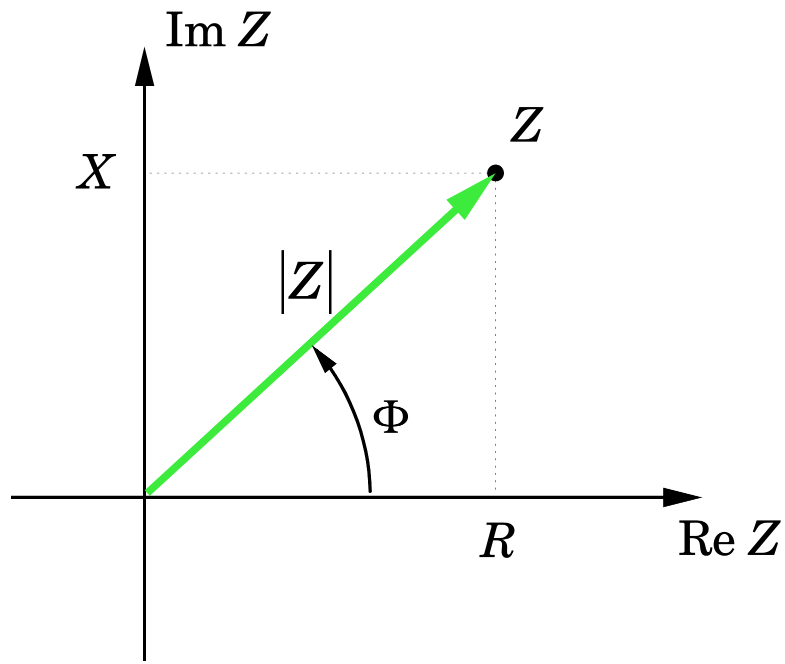
Impedancja:

$$Z = R + j\,X = |Z|\,\mathrm{e}^{\,j\Phi}$$

R – rezystancja (oporność czynna)
X – reaktancja (oporność bierna)

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\Phi = \mathrm{arctg}\left(\frac{X}{R}\right)$$



Admitancja:

$$Y \equiv \frac{1}{Z} = G + j\,B$$

G – konduktancja
B – susceptancja

$$0 \leqslant R < \infty$$
$$-\infty < X < \infty$$
$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \Phi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Dwójnik liniowy bierny– prądy sinusoidalne

Napięcie i prąd:

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) = \mathrm{Re}\left\{U_m \mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi_u)}\right\}$$

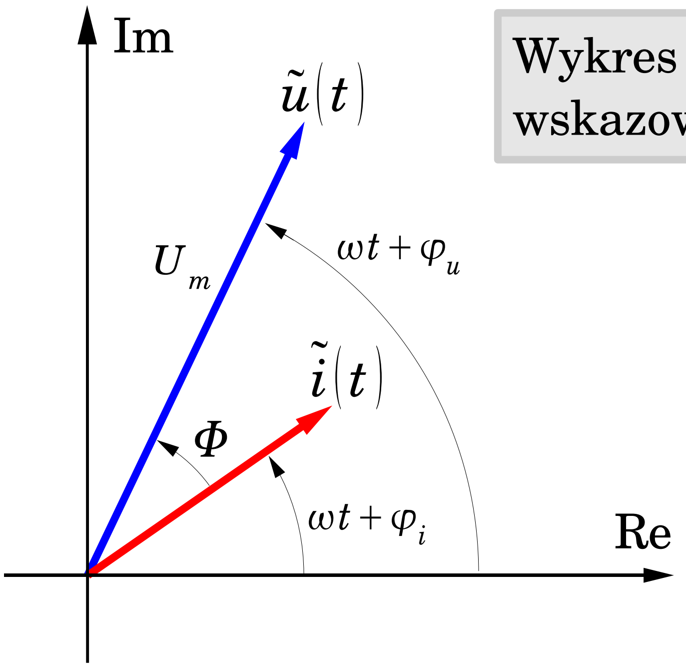
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) = \mathrm{Re}\left\{I_m \mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi_i)}\right\}$$

Napięcie i prąd uogólnione:

$$\tilde{u}(t) = U_m \mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi_u)}$$

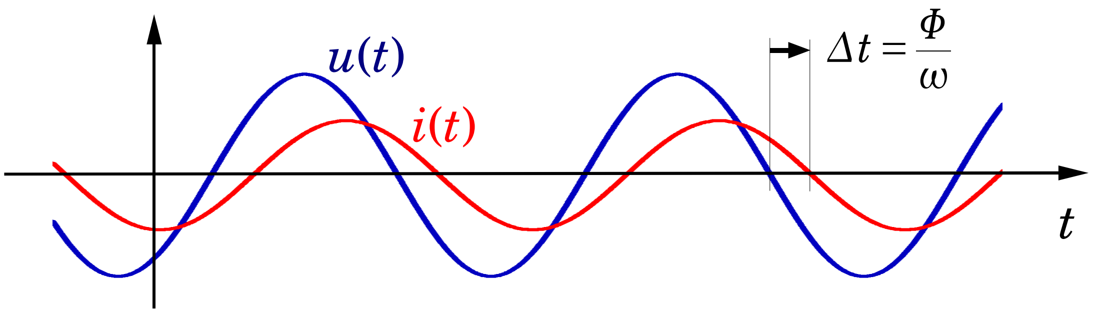
$$\tilde{i}(t) = I_m \mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi_i)}$$

Wykres wskazowy



Ugólnione prawo Ohma: $\boxed{\tilde{i}(t) = \frac{1}{Z}\,\tilde{u}(t),}$ gdzie $Z = |Z|\mathrm{e}^{j\Phi}$ (impedancja zespolona)

$$\Rightarrow \quad \tilde{i}(t) = \frac{1}{|Z|}\mathrm{e}^{-j\Phi}\, U_m \mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi_u)} = \frac{U_m}{|Z|}\,\mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi_u - \Phi)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_m = \frac{U_m}{|Z|}, \qquad \varphi_i = \varphi_u - \Phi}$$



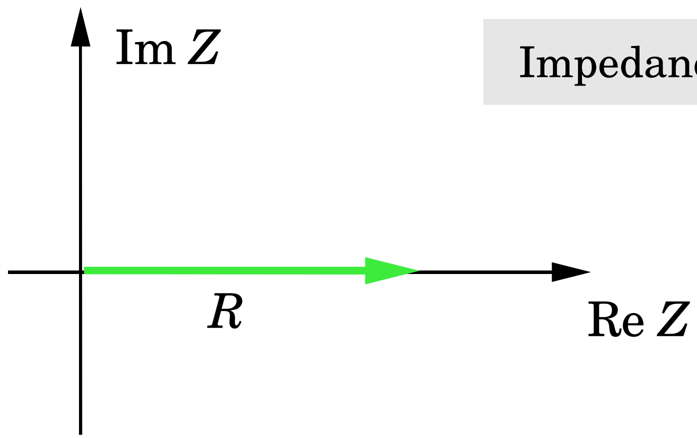
Idealny opornik

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

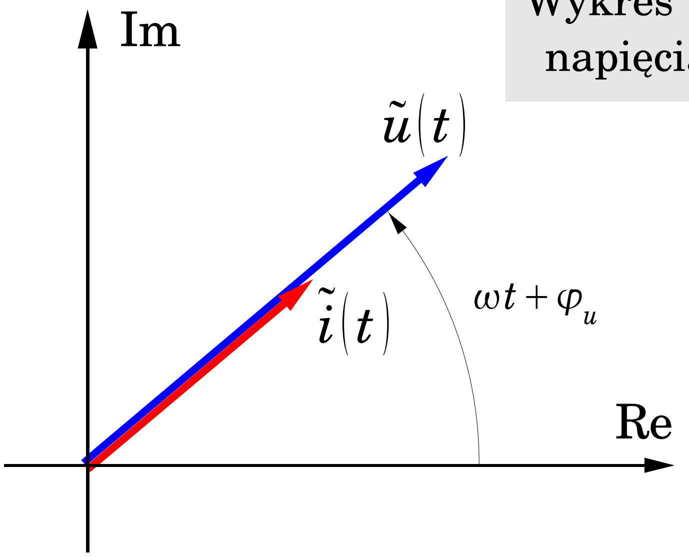
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$Z_R = R \quad \Rightarrow \quad |Z_R| = R, \quad \Phi = 0$$

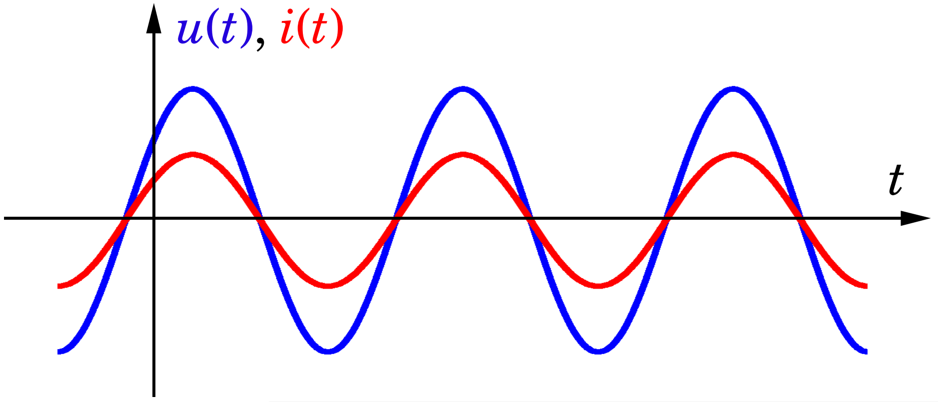
$$\boxed{I_m = \frac{U_m}{R}, \qquad \varphi_i = \varphi_u}$$



Impedancja



Wykres wskazowy napięcia i prądu



Przebieg czasowy napięcia i prądu

Idealny kondensator

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

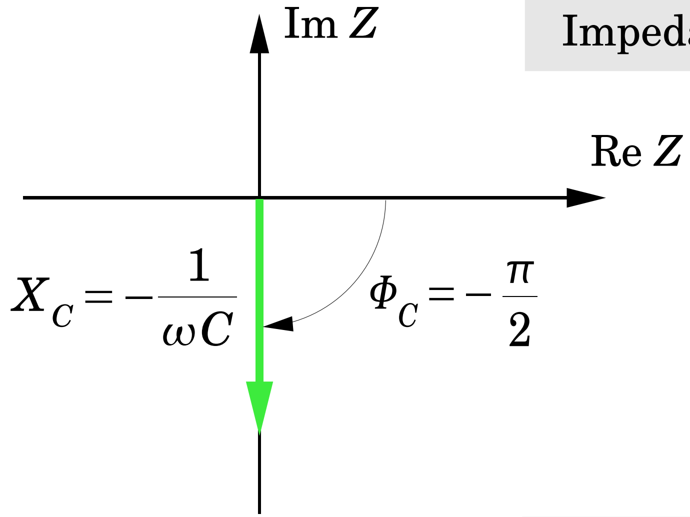
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$Z_C = jX_C = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C}\,\mathrm{e}^{-j\pi/2}$$

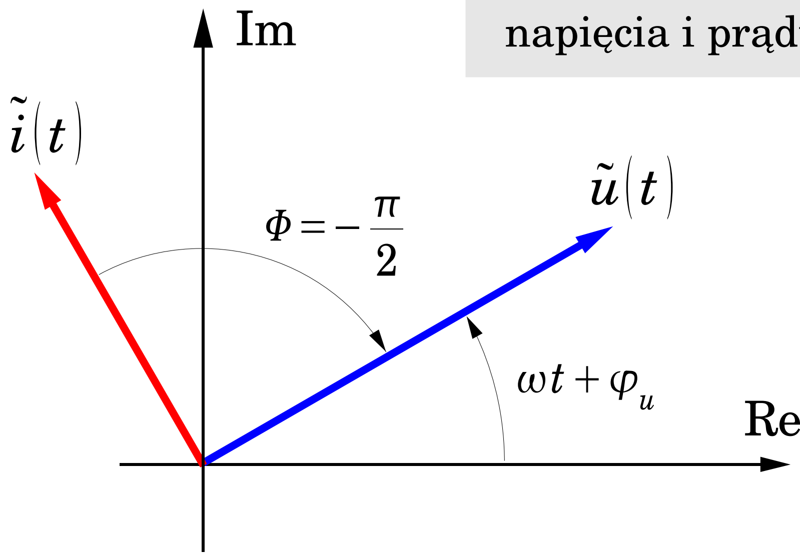
$$R_C = 0, \quad X_C = -\frac{1}{\omega C},$$

$$|Z_C| = \frac{1}{\omega C}, \quad \Phi_C = -\frac{\pi}{2}$$

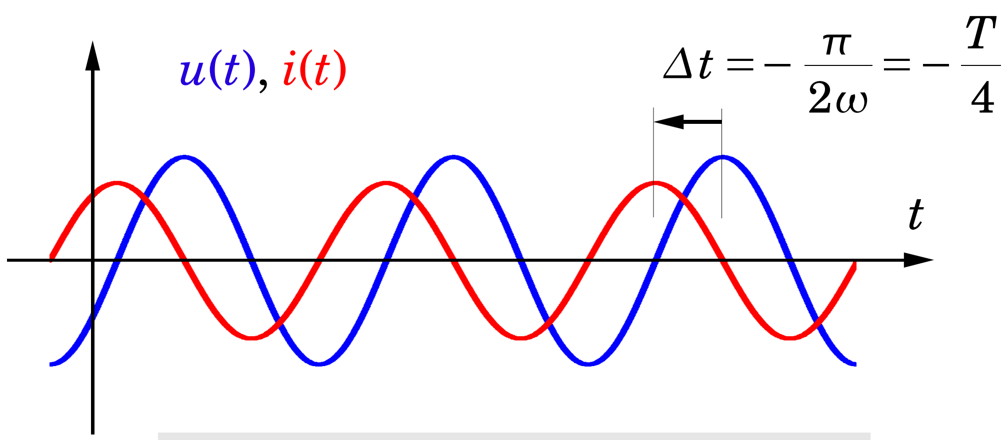
$$\boxed{I_m = \omega C U_m, \quad \varphi_i = \varphi_u + \pi/2}$$



Impedancja



Wykres wskazowy napięcia i prądu



Przebieg czasowy napięcia i prądu

Idealna cewka

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

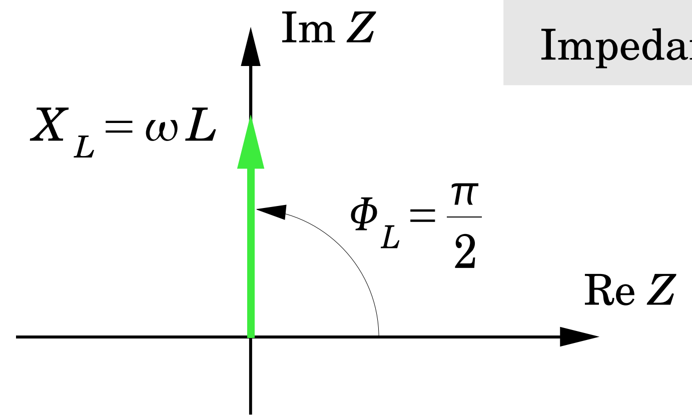
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$Z_L = jX_L = j\omega L = \omega L\, \mathrm{e}^{j\pi/2}$$

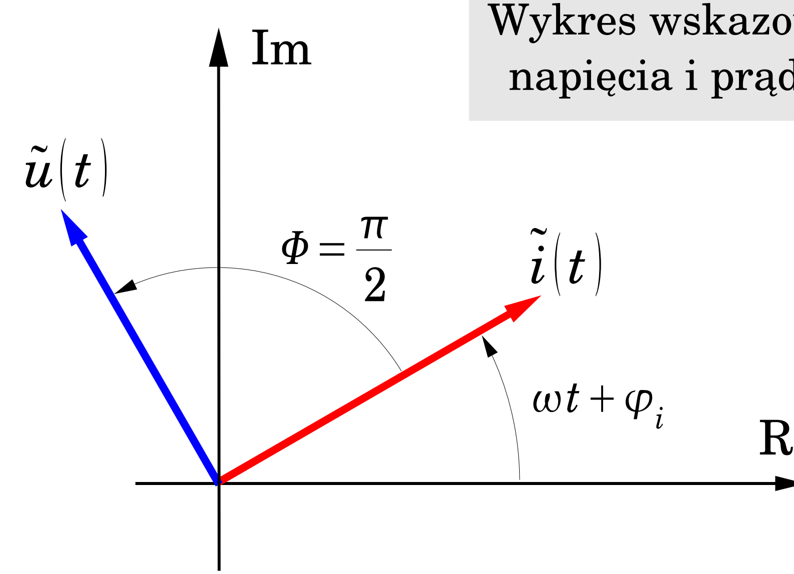
$$R_L = 0, \quad X_L = \omega L,$$

$$|Z_L| = \omega L, \quad \Phi_L = \frac{\pi}{2}$$

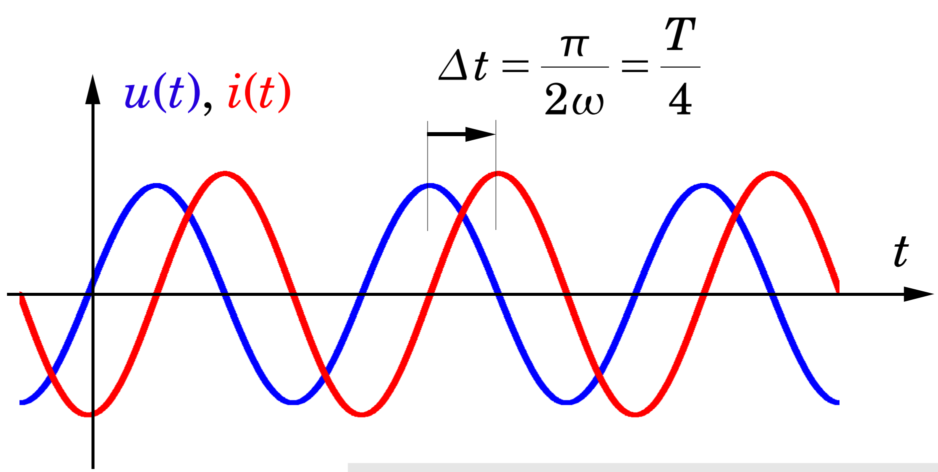
$$\boxed{I_m = \frac{1}{\omega L} U_m, \quad \varphi_i = \varphi_u - \pi/2}$$



Impedancja



Wykres wskazowy napięcia i prądu

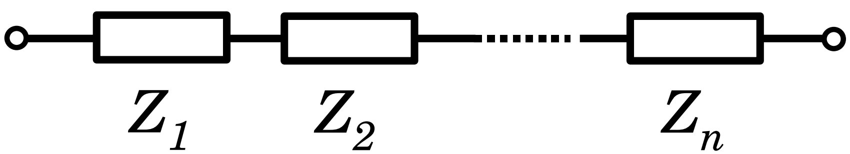


Przebieg czasowy napięcia i prądu

Łączenie impedancji

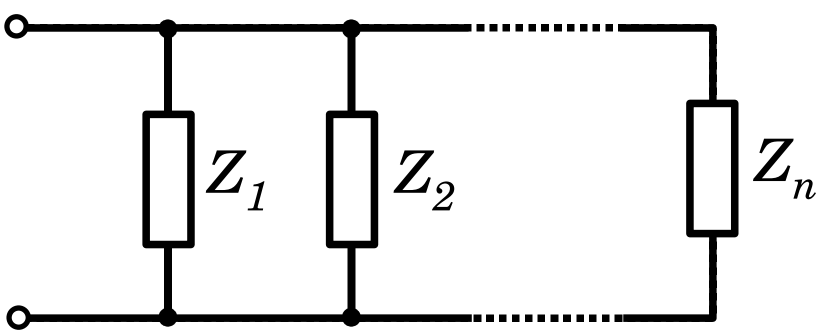
Połączenie szeregowe:

Impedancja zastępcza Z :



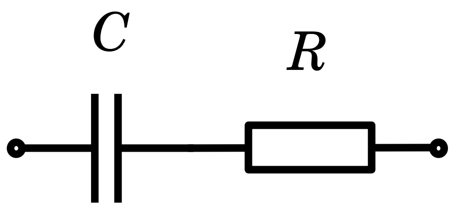
$$Z = \sum_{k=1}^{n} Z_k$$

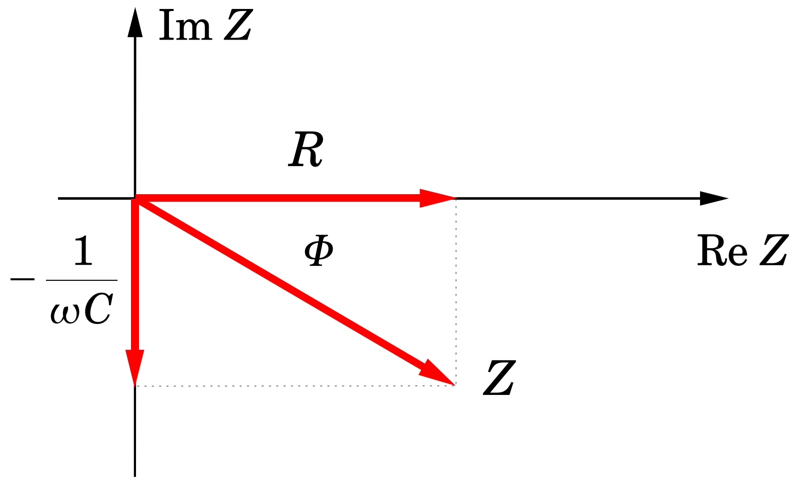
Połączenie równoległe:



$$\frac{1}{Z} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{Z_k}$$

Dwójnik szeregowy RC





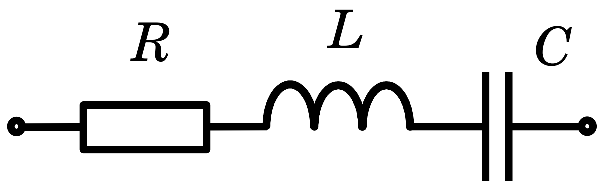
Impedancja zastępcza:

$$Z = Z_R + Z_C = R - \frac{j}{\omega C}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\Phi = \mathrm{arctg}\left(\frac{-1}{\omega R C}\right)$$

Dwójnik szeregowy RLC



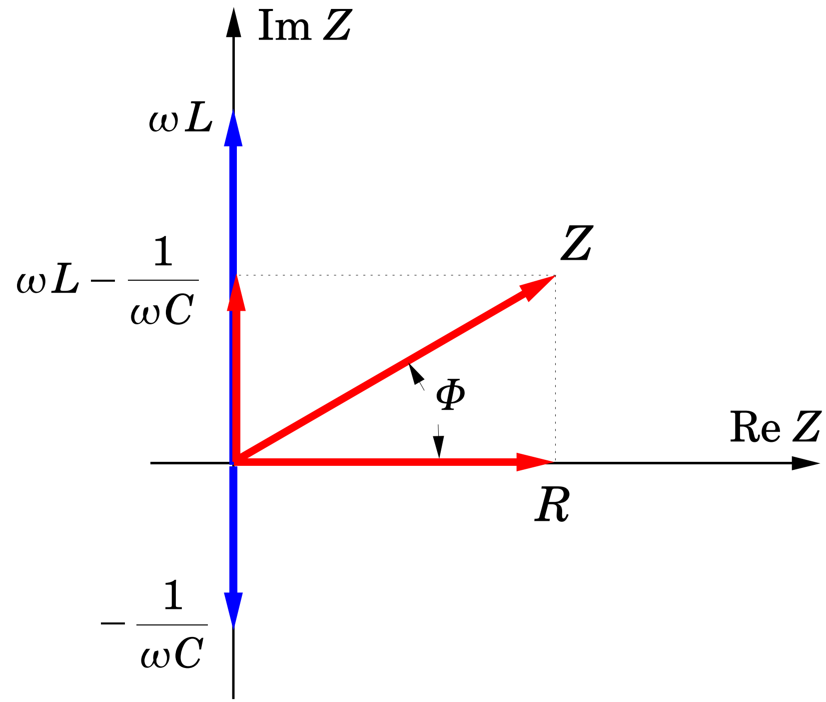
Impedancja zastępcza:

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} =$$

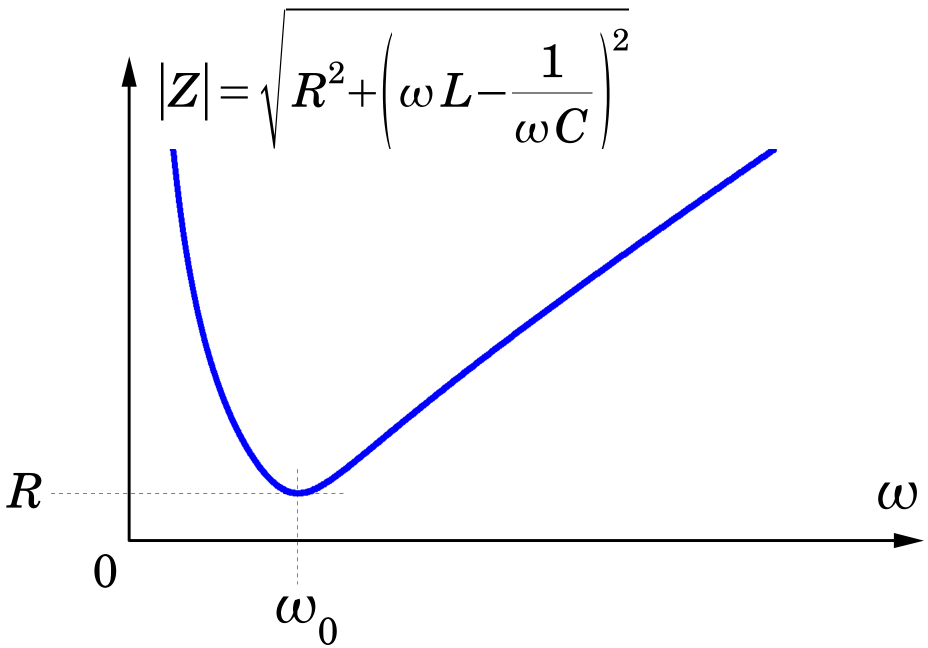
$$= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

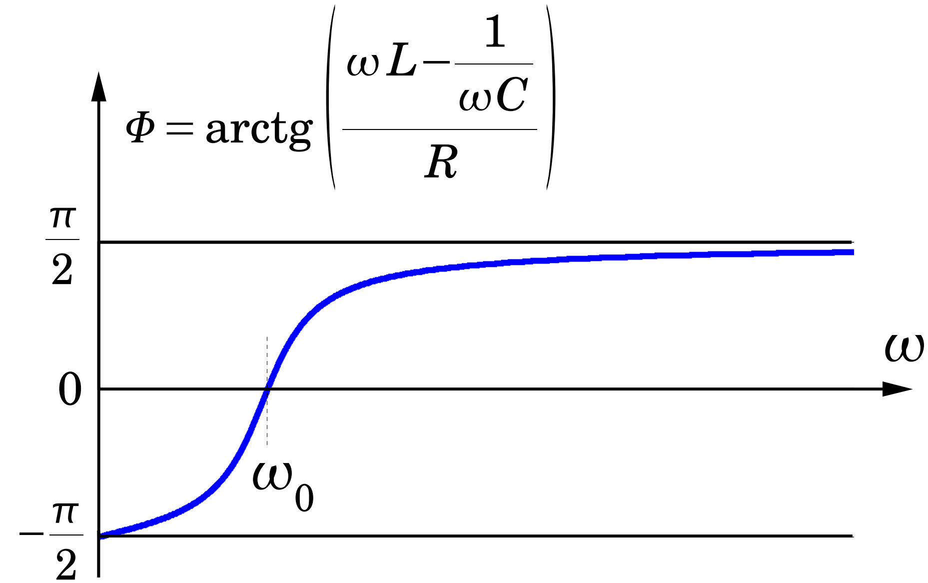
$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\Phi = \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$



Dwójnik szeregowy RLC





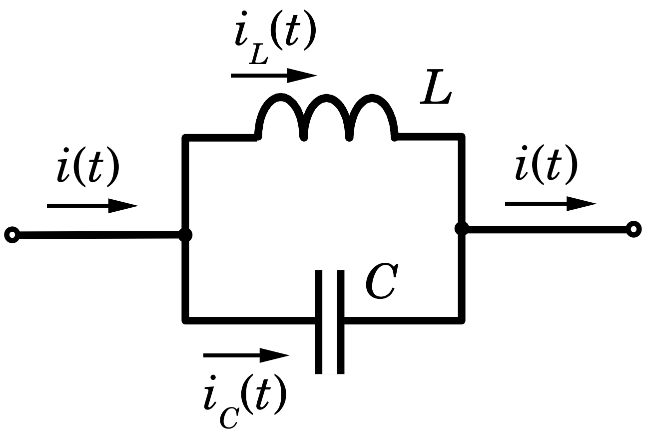
Rezonans napięć :

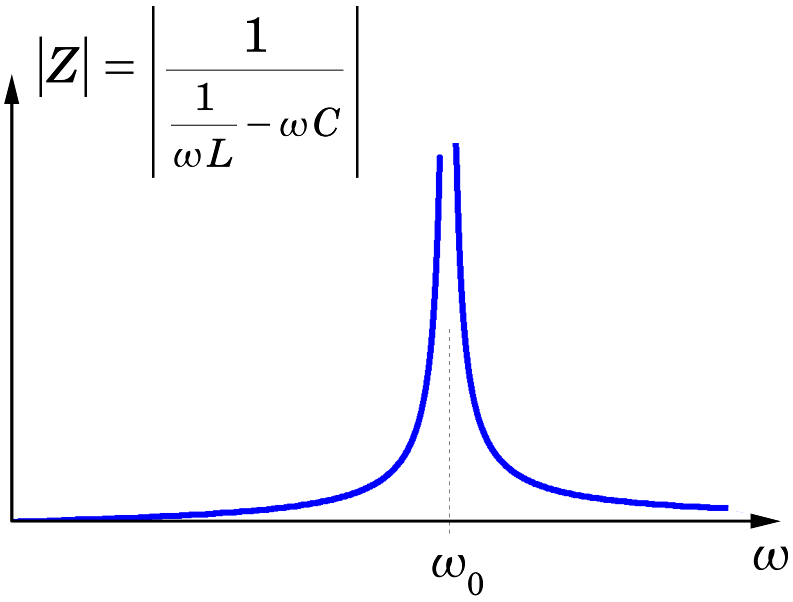
Przy pewnej częstości prądu $\omega = \omega_0$ reaktancja układu $X = 0$, a zatem $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$ osiąga wartość minimalną równą R. Dla napięcia o stałej amplitudzie U_m, amplituda prądu I_m osiąga przy tej częstości wartość maksymalną. Przesunięcie fazy pomiędzy napięciem a prądem $\Phi = 0$. Spadek napięcia na cewce jest przeciwny do spadku napięcia na kondensatorze, $u_L(t) + u_C(t) = 0$; całkowite napięcie jest równe spadkowi napięcia na oporniku.

Częstość rezonansowa ω_0:

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

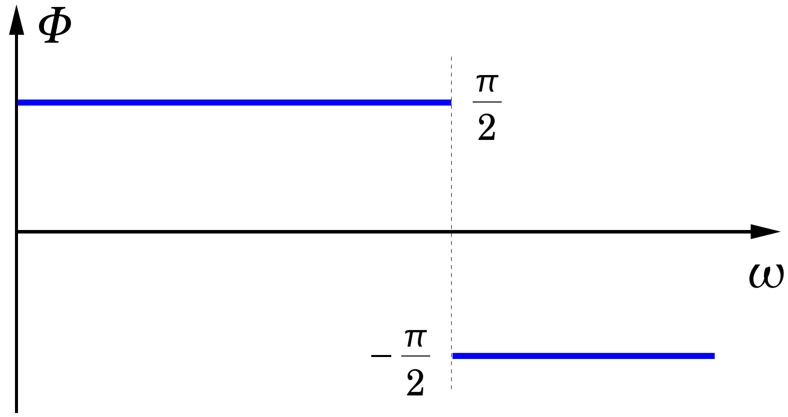
Dwójnik równoległy LC





Impedancja zastępcza:

$$Z = \left(\frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right)^{-1} = j \frac{1}{\frac{1}{\omega L} - \omega C}$$



Rezonans prądów:

Przy częstości $\omega = \omega_0$, nazywanej częstością rezonansową, $|Z| \to \infty$.
Całkowity prąd $i(t) = i_L(t) + i_C(t) = 0$.
Prądy przepływające przez cewkę i kondensator, $i_L(t) = -\ i_C(t)$,
mogą osiągać znaczne wartości.

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Moc wydzielona na dwójniku biernym

Prąd sinusoidalny:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t)$$

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \Phi)$$

Napięcie skuteczne:

$$U_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\, dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_m$$

Prąd skuteczny:

$$I_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\, dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m$$

Moc średnia:

$$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\, i(t)\, dt = \frac{1}{T} U_m I_m \int_0^T \cos(\omega t + \Phi)\cos(\omega t)\, dt = \ldots$$

$$\boxed{\bar{P} = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\Phi)}$$

lub

$$\bar{P} = U_{sk} I_{sk} \cos(\Phi)$$

$$\bar{P} = I_{sk}^2 \, |Z| \cos(\Phi)$$

Opornik: $\bar{P} = I_{sk}^2 R$

Kondensator: $\bar{P} = 0$

Cewka: $\bar{P} = 0$

Dwójniki aktywne

Dwójnik zawierający źródło energii elektrycznej nazywamy **dwójnikiem aktywnym** (czynnym).

Rozróżniamy dwa rodzaje źródeł elektrycznych, które może posiadać dwójnik aktywny:

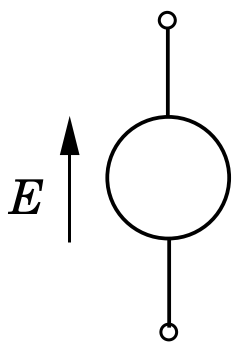
Źródła napięcia

Źródła prądu

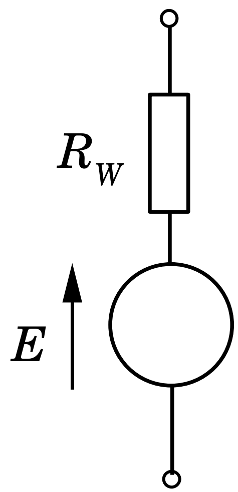
Źródła napięcia

Idealnym źródłem napięcia nazywamy takie źródło, które wytwarza napięcie E równe napięciu na zaciskach elektrycznych dwójnika, niezależnie od pobieranego prądu. Rezystancja wewnętrzna idelnego źródła napięcia $R_W = 0$.

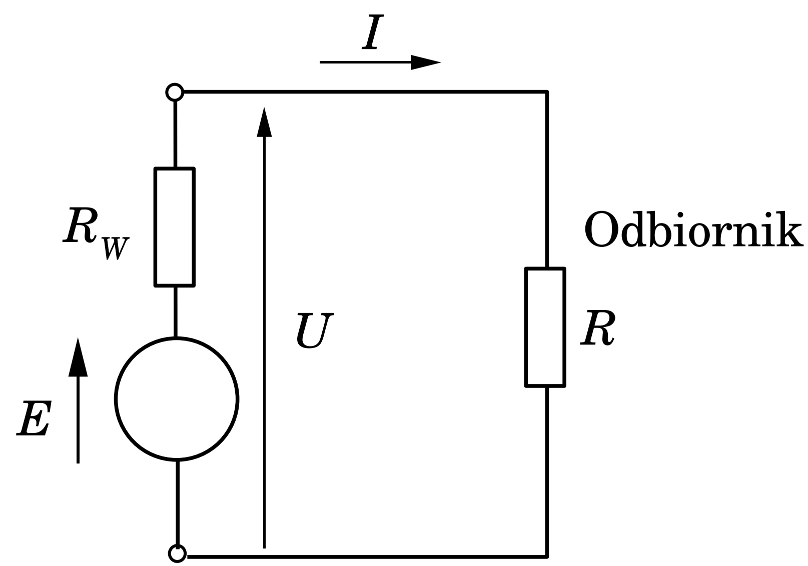
Rezystancja wewnętrzna rzeczywistych źródeł $R_W > 0$.



Idealne
źródło napięcia



Rzeczywiste
źródło napięcia

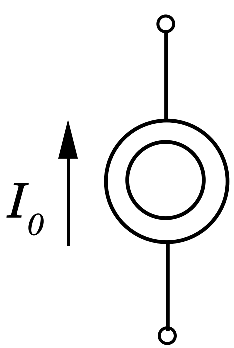


$$U = E - R_W I = \frac{R}{R+R_W} E$$

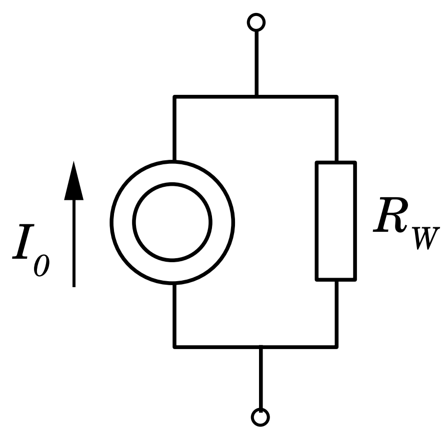
Źródła prądu

Idealnym źródłem prądu jest dwójnik aktywny, którego prąd nie zależy od napięcia na jego zaciskach elektrycznych. Warunek ten jest spełniony dla nieskończenie dużej rezystancji wewnętrznej źródła.

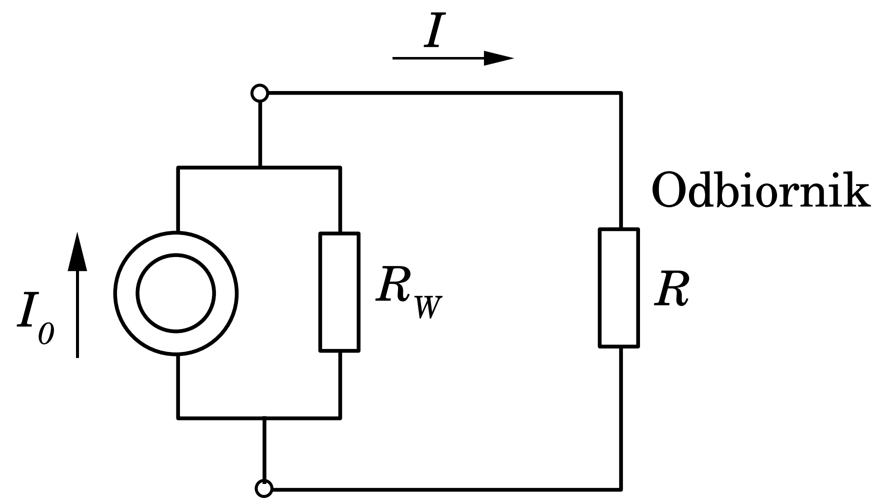
Rzeczywiste źródło prądu ma skończoną rezystancję R_W podłączoną równolegle do idealnego źródła prądu o nieskończonej rezystancji.



Idealne
źródło prądu

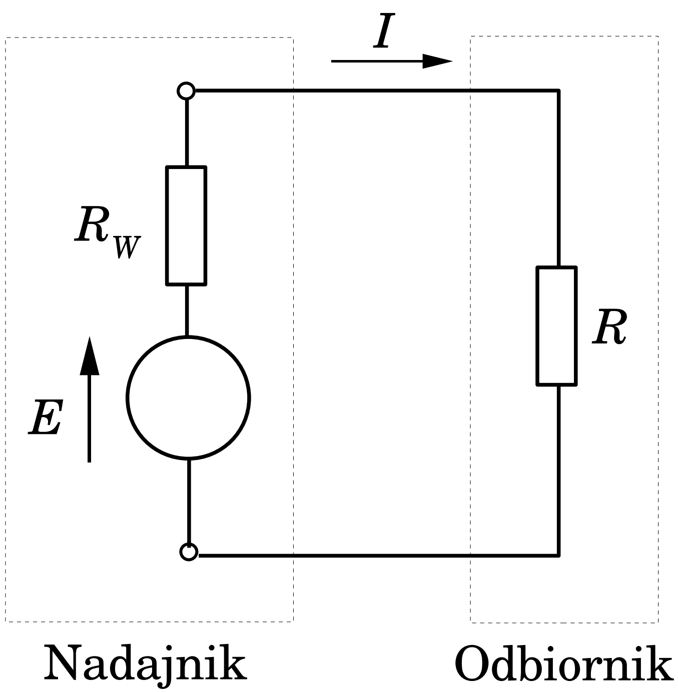


Rzeczywiste
źródło prądu



$$I = \frac{R_W}{R+R_W} I_0$$

Przekazywanie maksymalnej mocy pomiędzy układami



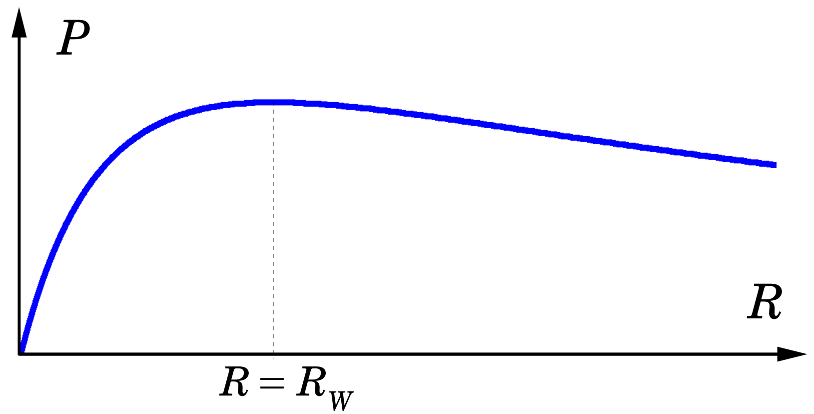
$$I = \frac{E}{R + R_W}$$

Przekazywana moc do odbiornika
(moc wydzielana na oporniku R) :

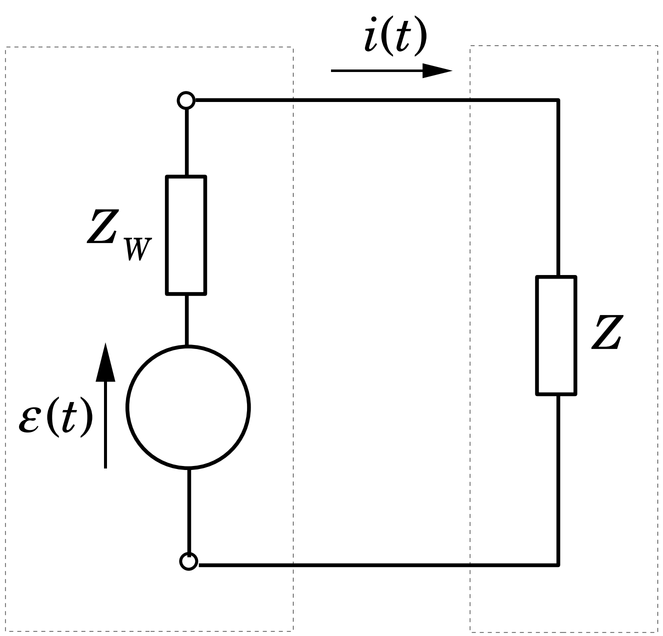
$$P = R I^2 = \frac{R}{\left(R + R_W\right)^2} E^2$$

Przekazywana moc jest maksymalna gdy:

$\boxed{R = R_W}$ i wynosi: $\boxed{P_{max} = \frac{E^2}{4 R_W}}$



Przekazywanie maksymalnej mocy pomiędzy układami (sygnały sinusoidalne)



Nadajnik

Odbiornik

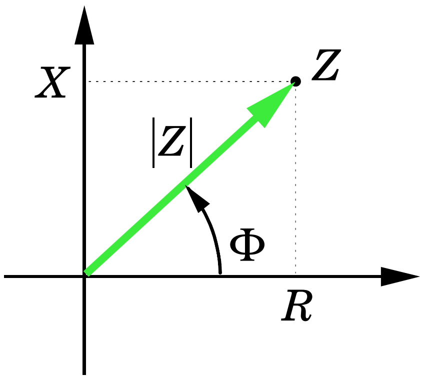
$$Z_W = R_W + j X_W \qquad Z = R + j X$$

$$\varepsilon(t) = E_m \cos(\omega t)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$I_m = \frac{E_m}{|Z + Z_W|}$$

Średnia moc wydzielona na impedancji Z :



$$\bar{P} = \frac{1}{2} I_m^2 \, |Z| \cos(\Phi)$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2} I_m^2 \, R$$

Wstawiając $I_m = \dfrac{E_m}{|Z + Z_W|}$ otrzymujemy:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{R}{|Z + Z_W|^2} E_m^2 = \frac{1}{2} \frac{R}{(R + R_W)^2 + (X + X_W)^2} E_m^2$$

Maksimum $\bar{P}(R, X)$ znajdujemy z warunków:

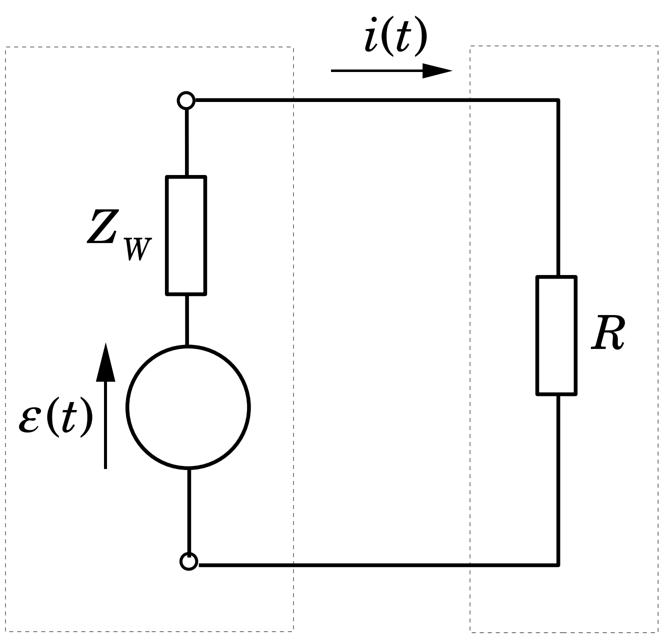
$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial R} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial \bar{P}}{\partial X} = 0$$

Zachodzi to gdy:

$$\boxed{R = R_W \quad \text{oraz} \quad X = -X_W} \quad \text{czyli} \quad \boxed{Z = Z_W^*}$$

$$\boxed{\bar{P}_{max} = \frac{E_m^2}{8 R_W}}$$

Przekazywanie maksymalnej mocy pomiędzy układami (sygnały sinusoidalne)



Nadajnik Odbiornik

$$Z_W = R_W + jX_W$$

$$\varepsilon(t) = E_m \cos(\omega t)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$I_m = \frac{E_m}{|R + Z_W|}$$

Przypadek gdy odbiornikiem jest rezystancja

Średnia moc wydzielona na rezystancji R :

$$\bar{P} = \frac{1}{2} I_m^2 \, R$$

Wstawiając $I_m = \dfrac{E_m}{|R + Z_W|}$ otrzymujemy:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{R}{|R + Z_W|^2} E_m^2 = \frac{1}{2} \frac{R}{(R + R_W)^2 + X_W^2} E_m^2$$

Maksimum $\bar{P}(R)$ znajdujemy z warunku: $\dfrac{\partial \bar{P}}{\partial R} = 0$

Zachodzi to gdy:

$$\boxed{R = \sqrt{R_W^2 + X_W^2} = |Z_W|}$$